トレーブ

位相ベクトル空間 超関数・核

(上)

松浦重武訳

数学叢書
22

吉岡書店

TOPOLOGICAL VECTOR
SPACES, DISTRIBUTIONS
AND KERNELS
by
F. Treves

ジョイアとダリオ・トレーブに捧げる

序

本書は関数解析学の体系的な教科書ではない．本書は現代解析学，特に偏微分方程式論に深い影響のある関数解析学の分野——それはヒルベルト空間論やバナッハ空間論の枠内には収まらない——に学生諸君を習熟させることを目的とし行なった講義のノートを集めたものである．したがって本書の内容も上述の一般的見地から選ばれている．第I部 (位相ベクトル空間——関数空間) 第II部 (双対性——超関数の空間) を通読すれば，これらの題材についての重要な事柄はすべて知ることができるようになっている．第I部は全く初等的なことから始まる．まずベクトル空間の定義と位相空間の定義を復習する．ついで位相ベクトル空間とその完備化を詳しく解説する．もちろん先へ進むにしたがって少しずつ難しくなるが，難しさの増し方がなるべくゆっくりとなるよう配慮してあるので一部の読者には丁寧すぎたかもしれない．本書の読み方としては，31章または32章まで読んだならばそこから途中をとばして第III部に進むがよい．第III部の最初の三つ四つの章を読んでテンソル積と双線形写像に慣れてから第II部と第III部 (テンソル積——核) の残りに進めばよい．普通の順序に読んでも構わないが，このようにした方が論法に慣れることによって一層容易になるだろう．

第I部と第II部のための予備知識としては点集合論，一変数関数論，実関数とルベーグ積分の一般的事柄を知っていれば十分である．ときどき測度に関することが少し必要な場合もある．線形代数については立入った知識 (行列のジョルダン標準形など) は全く用いないが，線形空間 (ベクトル空間) や線形写像の概念は知らずにすますことはできない．

本書は教育的配慮に大きな重点をおいている．そのためには体系的記述もと

きには犠性にした位である．関数解析学から具体的な解析学の問題に移り，また関数解析学へもどるというふうに話題を変える方法を用いた．これは議論の単調さを破るために特に工夫したところである．実際に学生を教えて見た経験によれば，この方法は成功であったと思う．本書ではもっぱら重要な（と著書に思われる）概念や諸結果に力点をおいて説明する．関数解析学（第 III 部は別として）から少し例を挙げれば，商空間，転置写像，Hahn–Banach の定理，Banach–Steinhaus の定理，Mackey の定理などである．他の諸概念のうちでそれほど決定的に重要ではないかまたは本文に説明したことから容易に導かれるものと見なしたものは，形式的な定義をかかげることをしないで，必要が生じた場合に応じて説明しておいた．たとえば積空間，線形部分空間，誘導位相などの場合がそれである．重要な概念であるにもかかわらず本書で取り扱わなかったものも少なくない．これには種々の理由がある．たとえば，本書でとりあげた題材と比べた場合に特殊性の一層強いために省いたもの，樽式空間 (barreled space) と比べた有界型空間 (bornological space)，フーリエ変換と比べたラプラス変換などがあり，また本書の全般的傾向から外れたために省いたもの，順序位相ベクトル空間やコンパクト集合の端点などがある．しかしながらこれらの事柄を省いてしまった最大の理由は紙数の都合によるものである．標準的な概念であっても必要に迫られるときまでその定義を述べない場合もある．たとえば一般帰納極限と射影極限，位相的直和などは 49 章に到るまでその定義は述べない！ このようにした理由は，根幹的な事柄さえしっかり学んでいれば知識の拡大にはさしたる困難はないと信ずるからである．しかしながら，もっと進んだ知識を得ることや体系的に書かれた書物を読むことが必要であるのはもちろんである（巻末に掲げた文献表を参照せよ）．

ヒルベルト空間やバナッハ空間およびその線形作用素の深い理論は，関数解析学の他の一翼をなしている．その重要性はいくら強調してもしすぎることはないぐらいであるが，本書ではそれらに全くふれないでよいと考えた．その理由は，それらの理論およびそれから派生する C^*-代数，von Neumann 代数の

理論とその調和解析や群表現への応用が，本書とは全然別の性格のものだからである．その上，これらの理論に関してはすでに多くのすぐれた書物が存在するからでもある．そうだからといって，ヒルベルト空間やバナッハ空間の基礎的な事柄を本書で取り扱わないというのではもちろんない．それらは丁寧に解説を述べ，その重要性を考慮して，一般的な定理をこれらの空間に適用する場合には注意して述べてある．空間 L^p と l^p は種々の観点から考察する．“説明の材料”もこれらの空間を利用する場合が多い．

第I部および第II部の内容を合せれば大体においてパーデュ大学 (Purdue University)[1] の通年講義に対応するが，本書はそのまま通読できるように少々加筆したものである．第III部は事情が異なる．位相テンソル積について講義をした経験はない．第III部を追加した理由を述べれば，解析学を学ぶものはテンソル積とその自然な位相および完備化について少々は慣れておくべきだという固い信念をもっているからである．

最後に，第I部と第II部の原稿を能くタイプしていただいたジュディ・シュナイダー夫人 (Mrs. Judy Snider) にお礼を申しあげる．

1967年4月，パリにて

フランソワ・トレーブ

(FRANÇOIS TREVES)

1) 著者 F. Treves が教鞭をとっていた大学．

訳　者　序

本書は，偏微分方程式の現代的理論に顕著な業績をもつ数学者 François TRÈVES の著書 Topological vector spaces, Distributions and Kernels の訳である．原著は全一巻より成っているが，この訳書は便宜上，上下二巻に分けることにした．上巻は，基礎的な準備事項から始まって，超関数の構造定理までを収めている．下巻は，フーリエ変換とその応用から始めて，超関数の理論の諸技巧を解説し，位相テンソル積と核の理論までを本文とし，付録のボレル・グラフの定理に終っている．

原著者の序文にあるように，本書は固い教科書風の書物ではなく，気楽に読める講義風のものであり，内容も例を豊富にとり入れて，教育的見地からの十分な配慮がなされている．しかもボレル・グラフ定理などの斬新な結果まで収めている．

日本語訳にあたっては，直訳よりも日本語で書かれた書物として読みやすいことに留意した．読者の理解を容易にするために相当多くの脚注を付したが，本文中にも訳者の判断によって随時“補い”を挿入してある．本書自体がずいぶん丁寧に書かれているから，それらの注釈は蛇足であったかも知れない．数学的術語はなるべく熟した訳語を当てたが，それが見当らない場合には適当に作語した．人名は片仮名がきの冗長さを避けるために原綴りをそのまま使用した（ただしロシヤ人名は適当なローマ字綴りを採用してある）．それらの人名は重要な定理や概念に冠することが多く，原綴りのままの方が印象的でよいと判断したことにもよる（念のためその（近似的な）読み方を目次のあとに片仮名で示してある）．もちろん，ユークリッド空間やエルミート形式のように熟してしまったものは原綴りを用いない．

この訳者が学生諸君のこの方面の学習に役立てば幸いである．

1973年7月

訳　　者

目　　次

——上　巻——

第II部　双対性．超関数の諸空間

【下巻主要内容】

第III部　テンソル積．核

上巻に現われる人名

Arzelà	アルツェラ	MacLaurin	マクローリン
Ascoli	アスコリ	Malgrange	マルグランジュ
Baire	ベール	Minkowski	ミンコフスキー
Banach	バナッハ	Montel	モンテル
Bolzano	ボルツァーノ	(von) Neumann	(フォン) ノイマン
Borel	ボレル	Nicodym	ニコディム
Bourbaki	ブールバキ	Paley	パレー
Cauchy	コーシー	Radon	ラドン
Dirac	ディラック	Riemann	リーマン
Egoroff	エゴロフ	Riesz	リース
Fourier	フーリエ	Runge	ルンゲ
Frechét	フレッシェ	Schwartz	シュバルツ
Hahn	ハーン	Schwarz	シュバルツ
Hausdorff	ハウスドルフ	Sobolev	ソボレフ
Heine	ハイネ	Steinhaus	シュタインハウス
Hilbert	ヒルベルト	Taylor	テイラー
Hölder	ヘルダー	Tychonov	チコノフ
Krein	クレイン	Weierstrass	ワイヤシュトラス
Krull	クルル	Wiener	ウィーナー
Lebesgue	ルベーグ	Young	ヤング
Leibniz	ライプニッツ	Zorn	ツォルン
Mackey	マッキー		

第 I 部
位相ベクトル空間.
関 数 空 間

第I部は位相ベクトル空間に関する基本的な定義と性質を取り扱う．双対性には余り言及しない．1章でフィルターの概念を導入して以後これを系統的に用いる．(1章の内容は位相空間の概念の近傍フィルターに力点をおいた復習である)．2章はベクトル空間の復習である．後に必要がないので代数的なことには深入りしない．スカラー体はいつも複素数体とする．他のスカラー体の場合の考察はしない(第II部において Hahn-Banach の定理を述べる際に実数体の場合を考察するが，すぐまた複素数体にもどる)．3章では位相と線形構造を自然な整合性条件のもとで組合せるという意味での総合を行なう．このことに関連して，読者は一つの代数 A とその位相で A が位相ベクトル空間にならないような具体例を知っておくのがよいと考えた．そのような例として形式的巾級数環 $\mathbf{C}[[X]]$ 上の最大イデアルの巾で定義される位相を考察する．この位相と係数の単純収束の位相を比較することは教育的であろう．どちらの位相に関しても $\mathbf{C}[[X]]$ は距離付け可能かつ完備になることに注意する．4章ではもっぱら商位相ベクトル空間について述べる．商空間は第II部で大いに利用するが，そこでは相異なる種々の位相が考察される．著者の経験によれば，これが学生諸君のもっとも苦手とするところのようである．弱双対性との関連で，双対空間の商空間および商空間の双対空間の上の種々の重要な位相を明確にとらえて正しく運用できることがどうしても必要である．

5章は (Hausdorff の分離条件をみたす) 位相ベクトル空間の完備化にあてる．完備化の定理とその証明を詳細に説明する．この定理は深いものではないが，このために全章をあてたのは，読者にコーシー・フィルターの概念に慣れてもらうためであり，(距離空間にならない) 完備一様空間を全く知らない学生諸君の多いことを講義の際に幾度も経験したからである．

6章は位相ベクトル空間のコンパクト部分集合にあてる．7章で局所凸空間

とセミノルムを導入する. いうまでもないが, 局所凸でないような位相ベクトル空間は取り扱わない. 8章では距離付け可能な位相ベクトル空間をとり上げる. それは位相が一つの距離によって定義できるような位相ベクトル空間のことである. 基礎空間が局所凸の場合について距離を実際に構成する. この距離の構成は一種の義務感に基づくものであって, その理由は少し古い教育を受けた人達は距離を用いて考えるのを好むからである. しかし少し注意して考察してみればすぐわかるように, 実際にはたいていの場合において距離を考えることは不必要であって, 近傍の可算基底で間に合うのである. さらに不便なことには, 一般にその距離によって定義される球が凸集合にならないのである. そして局所凸の場合以外には距離を考えることによる利益はほとんど見込みがない! もちろん開写像定理の証明に距離を用いなければ全く煩わしいことになるだろうが, その距離の実際の形は (平行移動で不変なかぎり) 問題ではない. 8章ではさらに距離付け可能な空間における連続性, コンパクト性, 完備性の判定条件を述べるとともに, 距離付け可能で完備な空間はすべて Baire 空間になることの証明を述べる. 9章では距離付け可能で完備な位相ベクトル空間の一番簡単な例, 有限次元 Hausdorff 位相ベクトル空間について手取り早く解説する. 有限余次元線形部分空間を考察するが, これは後に有用になる. それから閉超平面と連続線形汎関数の核の間の対応について述べる. これに続く三つの章は距離付け可能な局所凸空間の諸例にあてられる. これらは (一般性の減少する順に) Fréchet 空間, Banach 空間, Hilbert 空間である. Fréchet 空間がわれわれの目的にとって最重要な空間になる. Banach 空間と Hilbert 空間について本書で扱うのはもっとも基礎的かつ初等的な知識にかぎられる. たとえば Hilbert 空間に関する章では, 射影定理とその諸結果の証明, Hilbert 空間の基本定理《Hilbert 空間とその反双対空間の標準的同形性》の証明を述べ, それから簡単に (有限) Hilbert 和および正規直交基底を解説する. Fréchet 空間, Banach 空間, Hilbert 空間の基本的な例として導入されるのは

$\mathscr{C}^k(\Omega), L^p(\Omega)$ (Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合 ; $0 \leqslant k \leqslant \infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty$);

$H(\Omega)$: $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の正則関数の空間;

$\mathscr{C}^0(K)$, $\mathscr{C}^k(\bar{\Omega})$ (K : $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合 ; Ω : $\mathbf{R}^n$ の開集合);

$\mathscr{S}$: 無限遠で急減少な $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間

などの諸空間である.

13章では局所凸空間のうちで (一般には) 距離付け可能ではないがわれわれにとって非常に重要なもの : LF-空間 (Fréchet 空間列の狭義帰納極限空間) を取り扱かう. その例として多項式の空間 (次数をかぎった多項式のなす有限次元空間列の帰納極限として) およびコンパクトな台をもつ関数の空間 $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$, $L_c^p(\Omega)$ などについて述べる. 空間 $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ は**テスト関数** (test functions) の空間であり, **超関数** (distributions) はその上で定義される. Ω 上の超関数とは $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の上の連続線形汎関数, すなわち $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の双対空間の元のことである. これらの一連の関数空間の例を述べた後, 再たび一般理論にもどって位相ベクトル空間の有界集合の概念を導入する. 有界集合は双対性との関連において大いに利用される. Ascoli の定理を使って, 超関数の理論で用いられる空間の多くが (たとえば $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$) 閉有界集合がコンパクトになるという性質をもつことを証明する (このことは無限次元ノルム空間では決して起り得ない). 無限次元空間の場合のこの性質は Montel によって正則関数の正規族の研究において発見された. Montel の定理の証明も述べる. この定理は, $H(\Omega)$ の任意の閉有界集合はコンパクトになるというものである ($H(\Omega)$: $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の正則関数のなす空間).

15章は標準的な関数空間 $\mathscr{C}^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$ などにおける近似の技法の解説にあてる. 整関数, 多項式, コンパクトな台をもつ $\mathscr{C}^\infty$ 関数などによる近似を (それぞれが意味をもつ場合について!) 述べる. 16章ではこれらの近似の結果を利用して, $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の任意の局所有限開被覆に対してそれに従属するような $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ における1の分割の存在を示す. 第I部の最後の章, 17章は開写像定理とその証明にあてる.

1.

フィルター，位相空間，連続写像

一つの**位相ベクトル空間** (topological vector space) E とは，粗くいえば，二つの構造，すなわち，位相空間の構造とベクトル空間の構造をもった集合のことをいう．この二つの構造は，もちろん，**整合条件** (compatibility) によって結びつく．ここでは，これらの構造を別々に説明することから始めよう．

集合 E 上の**位相** (topology) は，通例その**開集合** (open set) を指定することによって定義される．しかし，本書のように，位相ベクトル空間を取り扱う場合には，各点の**近傍系** (system of neighbourhoods) を指定することによって位相を定義する方が便利である．位相を定義するこの二つの仕方は，全く同値であることがよく知られている．開集合とは，それに属する各点の近傍を含む集合（あるいは，開集合とは，その各点の近傍であるような集合）である．逆に，点 x の近傍とは，x を含むある開集合を含むような集合のことである．

各点の近傍系を用いて位相を定義するには，**フィルター** (filter) の概念を使うのがよい．これは非常に基本的な概念であって，これに慣れて，普通の数列や点列のように使用するために，読者はたいした苦労を必要とはしないであろう．フィルターの概念は，位相とは全く独立である．それは，なんの構造も持たない‘単なる’集合の上で定義される．

E を一つの集合とする．$\mathscr{F}$ が E 上の一つのフィルターであるとは，$\mathscr{F}$ は E の部分集合の集まり（‘部分集合族’という）であって，次の三つの条件をみたすことをいう．

(F_1) 空集合 $\emptyset$ は $\mathcal{F}$ に属さない.

(F_2) $\mathcal{F}$ に属する二つの集合の共通部分は，また $\mathcal{F}$ に属する.

(F_3) $\mathcal{F}$ に属する集合を含む集合は，また $\mathcal{F}$ に属する.

集合 E 上のフィルターのもっとも簡単な例としては，空でない一つの部分集合 A をあたえて，A を含むあらゆる集合からなる集合族を考えるとよい.

E の任意の無限点列に対して，E 上のフィルターを対応させることができる. $x_1, x_2, \ldots$ を無限点列としたとき

(AF) 点列 $x_1, x_2, \ldots$ のうち，たかだか有限個を除いてすべての点を含む部分集合

の全部からなる集合族を考えると，一つのフィルターが得られる. これを，この点列の**付随フィルター** (associated filter) という.

E の部分集合族 $\mathcal{B}$ がフィルター $\mathcal{F}$ の**基底** (basis) であるとは，二つの条件

(BF_1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$，すなわち $\mathcal{B}$ に属する集合はすべて $\mathcal{F}$ に属する.

(BF_2) $\mathcal{F}$ に属するどの集合も，$\mathcal{B}$ に属する集合を含む.

フィルター基底の簡単な例としては，実数直線上で，区間 $(-a, a)$, $a > 0$ の全体を考えるとよい. これは，実数直線の普通の位相に関する 0 の近傍系のなすフィルターの一つの基底である. 他の有用な例としては，点列 $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ に付随したフィルター $\mathcal{F}$ に対して

$$S_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を考える. S_n を E の部分集合とみなせば

$$S = S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$$

となり，$\{S_n ; n = 1, 2, \ldots\}$ が $\mathcal{F}$ の基底の一つである.

$\mathcal{A}$ を E 上の一つの部分集合族とする. これに対して，次の問題を考えよう. $\mathcal{A}$ を基底にするようなフィルターが存在するだろうか? (一つのフィルターに対して，基底は幾つもありうることに注意しておこう.) フィルターの公理 (F_1), (F_2), (F_3) をみれば，もしフィルター $\mathcal{F}$ があるとすれば，それは $\mathcal{A}$ によ

って完全に決定される．それは，$\mathscr{A}$ に属する部分集合を含むようなあらゆる部分集合のなす集合族である．これを $\mathscr{F}$ と書こう．すると，われわれの問題は，"$\mathscr{F}$ はフィルターであるか？" ということになる．$\mathscr{F}$ は明かに (F_3) をみたす．(F_1) も，空集合が $\mathscr{A}$ に属さないとして置けばよろしい．(F_2) は $\mathscr{A}$ に関する次の条件と同等になる．

(BF)　$\mathscr{A}$ に属する二つの集合の共通部分は，また $\mathscr{A}$ に属する集合を含む．

この条件と (F_2) の違いは，$\mathscr{A}$ に属する二つの集合の共通部分は $\mathscr{A}$ に属する必要はなく，単に $\mathscr{A}$ に属する集合を含めばよい，ということである．結局，E 上のフィルター基底とは E 上の（空集合ではない）部分集合からなる（空でない）集合族で，条件 (BF) をみたすもののことである．この基底によって生成されるフィルターは，条件 (BF_2) によってただ一つ定まる．

次は，《フィルターの比較》．われわれは，"このフィルターは，もう一つのフィルターよりもこまかい" というような言い方を用いる．フィルターとは E 上の集合族（集合の集合）であったことを思い出そう．すなわち，E 上のフィルターは，集合 E のあらゆる部分集合の全体，通常これを $\mathfrak{P}(E)$ と表わす，の部分集合であった．どんなフィルターも，一つの集合 $\mathfrak{P}(E)$ の部分集合だから，そこには自然な順序関係すなわち包含関係がある．したがって，一つの集合 E 上の二つのフィルター $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ に対して，$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ と書くことは意味をもつ．これは E の部分集合で $\mathscr{F}$ に属するものはすべて $\mathscr{F}'$ に属するという意味である．フィルターの場合には，$\mathscr{F}$ が $\mathscr{F}'$ に含まれるという代りに，"$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ よりも細かい" というふうに表現するのが普通である．あるいは，"$\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}'$ より粗い" という．

A, A' をあたえられた E の（空でない）部分集合とし，$\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ をそれぞれ A, A' を含むあらゆる部分集合のなすフィルターとすれば，"$\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ より細かい" というのは $A' \subseteq A$ と同値である．

集合 E 上の**位相** (topology) とは，E の各点 x に対して，E 上のフィルター $\mathscr{F}(x)$ を，次の二条件をみたすように定めることをいう．

(N_1) $\mathscr{F}(x)$ に属する集合はすべて x を含む.

(N_2) $\mathscr{F}(x)$ に属する集合 U に対して，$\mathscr{F}(x)$ に属する [適当な] 集合 V が存在して，V の任意の点 y に対し，U は $\mathscr{F}(y)$ に属する.

これらの条件がみたされるように $\mathscr{F}(x)$ が定められたとき，われわれは E 上に一つの位相があたえられたという．またこの $\mathscr{F}(x)$ を点 x の**近傍フィルター** (filter of neighbourhoods) とよぶ．ちょっとみたところ，条件 (N_2) は複雑にみえる. しかし実際には，簡単な直観的事実を表わしているにすぎない. 粗っぽくいえば，点 x の近くの点 z (すなわち z は U の点) に対して，x に十分近い点 y (十分近いことの正確な表現が，y は V の点ということになる) をとれば，z はまた y の近くにある (すなわち $z \in U \in \mathscr{F}(y)$) ということを意味している．開集合の言葉で述べれば，(N_2) はもっと明瞭になる．すなわち，U は x の近傍だから，U は x を含むある開集合を含む．そのような開集合の一つを V とせよ．V は開集合で $U \supseteq V$ だから，U は明らかに V の各点の近傍になっている. フィルター $\mathscr{F}(x)$ の基底のことを x の**基本近傍系** (basis of neighbourhoods または fundamental system of neighbourhoods) という．この概念は，これから重要な役割をする.

一点の近傍フィルターの概念および一点の**近傍** (E の部分集合で，その点の近傍フィルターに属するもの) の概念を知ってしまえば，位相を記述する諸概念を述べることは簡単である. すでに述べたように, **開集合** (open set) とは, その各点の近傍になっているような集合のことである．E の部分集合が**閉じている** (closed) または**閉集合** (closed set) であるとは，その補集合が開集合なることをいう．集合 $A \subseteq E$ の**閉包** (closure) とは，A を含む最小の閉集合のことをいう．それを $\bar{A}$ で表わす．次のことも簡単にわかる．ある点が $\bar{A}$ に属するためには，その点の任意の近傍が A と交わる (A との共通部分が空でない) ことが必要十分である．ある集合の**内部** (interior) とは，その集合に含まれる最大の開集合のことをいう．A を集合としたとき，その内部は $\mathring{A}$ で示す．集合 A が集合 B で**稠密** (dense) であるという概念も重要である．A, B を位相空間 E

の部分集合としたとき．“A が B で稠密である”とは A の閉包 $\bar{A}$ が B を含むことをいう．特別の場合として，A が E で稠密（あるいは**いたるところ稠密** (everywhere dense)）とは，$\bar{A}=E$ のことである．A が B で稠密であるとは，B の任意の点 x の任意の近傍 $U(x)$ に対し，$U(x)$ に属する A の点が存在することである．すなわち $A \cap U(x) \neq \emptyset$. いたるところ稠密な集合の標準的な例としては，実数直線 $\mathbf{R}$（普通の位相をあたえた）の部分集合としての有理数の全体 $\mathbf{Q}$ がある．その補集合 $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ もまた $\mathbf{R}$ で稠密である．稠密な開集合の例としては，平面上では直線の補集合，空間では平面の補集合など．また，開集合や閉集合に対して，共通部分や合併に関する基本的な性質をみるのも容易である．すなわち，有限個の開集合の共通部分は開集合である（これは公理 (F_2) から，一点の近傍の有限個の共通部分はやはりその点の近傍であることよりただちにわかる）．任意個（有限でも無限でもよい）の開集合の合併はまた開集合である（これは公理 (F_3) から，一点の近傍と任意の集合との合併は，またその点の近傍であることよりわかる）．補集合を考えることにより，閉集合の有限個の合併および任意個の共通部分は閉集合になる．

一つの集合 E 上に相異なる幾つかの位相をあたえることは，もちろん可能である．位相ベクトル空間を取り扱うときには，しばしばこのような事情，すなわち，一つのベクトル空間にいくつもの相異なる位相（後に述べる意味で，ベクトル空間の構造と整合した）を考えねばならない事情に出会う．たとえば，どんな集合 E 上にも，次の二つの位相を導入することができる．（もっとも，これらはほとんど用られないが．）

(1) **自明位相** (trivial topology).[2] E の各点の近傍は E 自身だけ．

(2) **離散位相** (discrete topology). E の各点 x の近傍としては，x を含む任意の部分集合を採用する．特に一点 x だけからなる集合 $\{x\}$ が点 x の近傍であり，これが x の近傍フィルターの基底である.[1]

さて，フィルターを比較したのと同様に，位相を比較することができる．$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$

---

1) 厳密にいえば，集合 $\{x\}$ だけからなる集合族 $\{\{x\}\}$ がフィルター基底である．

2) 混沌位相 (chaotic topology)

を E 上の二つの位相としよう．“$\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}'$ よりも細かい” とは，$\mathcal{T}'$ に関する開集合がすべて $\mathcal{T}$ に関する開集合になっていることをいう．これは次のようにいっても同値である：$\mathcal{T}'$ に関する一点の近傍は，$\mathcal{T}$ に関してもその点の近傍になっている．すなわち，$\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{F}'(x)$ をそれぞれ位相 $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ に関する x の近傍フィルターとしたとき，$\mathcal{T}$ が $\mathcal{T}'$ より細かい（これを $\mathcal{T} \geqslant \mathcal{T}'$ と書く）とは，任意の $x \in E$ に対して，$\mathcal{F}(x)$ が $\mathcal{F}'(x)$ よりも細かいことを意味する．一つの集合上に二つの位相があたえられたとしても，そのうちのどちらも他方よりも細かくなっていないこともある．一つが他方よりも細かいとき，これらの位相は**比較可能** (comparable) という．離散位相はどんな位相よりも細かく，自明位相はどんな位相よりも粗い．

位相の概念は**収束** (convergence) や**連続性** (continuity) の概念の基礎となるように導入されたものである．もちろん，位相の概念が導入される以前にも，これらは（少なくとも大抵の場合）正しく運用されてはいたが．さて，収束，連続性の一般的な定義を述べよう．

《収束》 これはフィルターに関したことである．収束性を論ずる対象物はフィルターである．位相空間 E 上のフィルター $\mathcal{F}$ はどんなときに “収束する” といわれるのか．$\mathcal{F}$ は E の部分集合族であったことを思い出そう．$\mathcal{F}$ が E の点 x に収束するとは，$\mathcal{F}$ の元（これは E の部分集合）が点 x のまわりにだんだん縮んでゆく（小さくなってゆく）こと，したがって，$\mathcal{F}$ の元である部分集合の各点がだんだん点 x に近づいてゆくことを意味する．このような直観的表現は，E が位相空間だから，近傍の言葉で正確な表現に直すことができる．まず，点 x のどんなに小さい近傍も，フィルター $\mathcal{F}$ に属する一つの集合を含むこと，したがってその集合に含まれるような $\mathcal{F}$ の元をすべて含むことを正確に表現しなければならない．ところで，これは，公理 ($\mathrm{F_3}$) によって，その近傍自身がフィルター $\mathcal{F}$ に属することを意味する，実際それは $\mathcal{F}$ の元を含むからである．さて，“点 x のどんなに小さい近傍も” という語句の数学的意味は，単に “点 x の任意の近傍が” というにすぎない．まとめれば，結局 “フィルター $\mathcal{F}$ が点 x に収束する” とは “x の任意の近傍が $\mathcal{F}$ に属する” こと，換言すれば “$\mathcal{F}$ が

x の近傍フィルター $\mathscr{F}(x)$ よりも細かい" ということになる．これが，フィルター $\mathscr{F}$ が点 x に収束することの意味である．

点列の収束がどのように定義されたかを思い出してみよう．$S=\{x_1, x_2, \dots\}$ を点列とする．S が x に収束するとは，x の近傍 U を任意にあたえたとき，整数 $n(U)$ が存在して，$n \geqslant n(U)$ ならば $x_n \in U$ となることであった．$S=S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$ を7頁で導入した部分列の系列としよう．S が x に収束するとは，任意の $U \in \mathscr{F}(x)$ に対し，整数 $n(U)$ が存在して $S_{n(U)} \subseteq U$ となることである．E の部分集合族 $\{S_n\}$ は，点列 S に付随したフィルターの基底であるから，これからただちに，"点列 S が x に収束するための必要十分な条件は，これに付随するフィルターが x に収束することである" ということがわかる．

一つのフィルターが，幾つかの相異なる点に収束し得ることに注意しよう．たとえば，E に自明位相 (10頁) がはいっていたとすると，どんなフィルターも E のすべての点に収束する．また，フィルターは収束しないこともある．たとえば，収束しない点列に付随したフィルターは収束しない．他の例として，E の1点 x を含むすべての部分集合からなるフィルターとは異なるフィルターを考えよう．E に離散位相を入れると，収束するフィルターは各点の近傍フィルターだけである．したがって考えたフィルターは収束しない．一般な位相空間における収束の議論は，これでおわりにする．

《連続性》 これは写像に関することである．位相空間論では，写像 $f: E \to F$，すなわち位相空間 E から位相空間 F への写像 f が連続であるとは，次の二つの条件のうちのどちらか一つがみたされていることをいう．

(a) E の任意の点 x とその像 (image) $f(x) \in F$ の任意の近傍 V に対して，その**逆像** (preimage または inverse image) すなわち，集合

$$f^{-1}(V)=\{x \in E;\ f(x) \in V\}$$

が点 x の近傍となる．短かく書けば：

$$\forall x \in E,\ V \in \mathscr{F}(f(x)) \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathscr{F}(x).$$

(b) F の任意の開集合 $\mathcal{O}$ に対して

$$f^{-1}(\mathcal{O})=\{x\in E\,;\,f(x)\in\mathcal{O}\}$$

が E の開集合になる．

読者には，(a) と (b) の同値性を検証するのは容易であろう．これらの条件の直観的意味については，次のようにいえる：写像 f が点 x で連続であるとは，“点 $x'\in E$ が x に収束する” とき “$f(x')$ は $f(x)$ に収束する”．“$f(x')$ が $f(x)$ に収束する” というのを正確に述べれば，$f(x)$ の任意の近傍をあたえたとき $f(x')$ は “ついには” その近傍にはいる，ということになる．ここで，“ついには” の意味は，“x' が x に十分近づけば” ということである．すなわち，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して，x' か x に十分近づけば，$f(x')\in V$ ということである．“x' が x に十分近づけば” の意味は，x の適当な近傍 U の存在の主張であり，“$x'\in U$ ならば，$f(x')\in V$” ということになる．これはまさに条件 (a) であり，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して，x のある近傍 U が存在して

$$x'\in U \text{ ならば } f(x')\in V$$

となる．

もし E の点列 $\{x_1,x_2,\dots\}$ が点 x に収束し，f が E から F への連続写像なら，点列 $\{f(x_1),f(x_2),\dots\}$ が F で $f(x)$ に収束することはただちにわかる．フィルターの収束も写像の連続性と容易に結びつく．

$$f:E\to F$$

を集合 E から集合 F への写像としよう．$\mathscr{F}$ を E 上のフィルターとする．f による $\mathscr{F}$ の像 $f\mathscr{F}$ とは

$$(f\mathscr{F})_0=\{f(U)\,;\,U\in\mathscr{F}\}$$

を基底とするフィルターとして定義する．$(f\mathscr{F})_0$ 自身は一般にはフィルターでないことに注意しよう．しかし，いつでもフィルター基底にはなっている（これを検証するのは，読者の演習問題としよう）．さて “E,F を位相空間とし，フィルター $\mathscr{F}$ は点 x に収束し，f は連続写像とすると，$f\mathscr{F}$ は点 $f(x)$ に収束する”．実際，f の連続性から，$f\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}(f(x))$ よりも細かい．これは上述の条件

(a) のいい換えにすぎない．もし $\mathscr{F}$ が $\mathscr{F}(x)$ より細かければ（これは $\mathscr{F}$ が x に収束することである），$f\mathscr{F}$ は $f\mathscr{F}(x)$ よりも細かく，したがってもちろん，$\mathscr{F}(f(x))$ よりも細かい．

われわれは連続写像，すなわち，いたるところ定義され，いたるところで連続なものだけを考えた．しかしもちろん，一点だけで連続な写像についても考察することができる．これは，条件

$$\text{すべての } V \in \mathscr{F}(f(x)) \text{ に対して，} f^{-1}(V) \in \mathscr{F}(x)$$

で表わされる（x が考えている一点）．あるいは，

$$f\mathscr{F}(x) \geqslant \mathscr{F}(f(x))$$

と書いても同じことである．実際には，この本で考える写像は，すべて，いたるところで定義されているものだけを考察する．

最後の注意として，E と F とは集合としては同じものとし，位相だけが異なっている場合を考えよう．f としては，E から F への**恒等写像** (identity mapping) I を考える（すなわち，すべての x について $I(x)=x$ なるもの）．次の二つは明らかに同値である．

(i)　$I: E \to F$ は連続である．

(ii)　E の位相は F の位相よりも細かい．（位相は二つとも同一の集合上の位相である．）

演　習　問　題

1.1.　X を位相空間とし，A, B をその部分集合とする．もし A が開集合なら，

$$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

なることを証明せよ．また A が開集合でないとき，この包含関係が成立しない例をあたえよ．

1.2.　連続でかつ**上への** (surjective, onto) 写像による稠密な集合の像は，やはり稠密であることを示せ．

1.3.　X, Y を位相空間とし，$f: X \to Y$ を連続写像とする．B を Y の部分集合とし，$\overline{B}$ をその閉包とする．このとき，関係式

$$f^{-1}(B) \text{ の閉包} = f^{-1}(\bar{B})$$

は常に正しいか.

1.4. 次のようなことがおきる例をつくれ，X, Y は位相空間，$f : X \to Y$ は連続写像で，A は X の閉集合であるが，$f(A)$ は Y の閉集合ではない.

1.5. 平面 $\mathbf{R}^2$ において，一つの直線 L を考える．$\mathbf{R}^2$ における L の近傍フィルターとは，L を含む開集合を含むような集合全体のなすフィルターのこととする．このフィルターは可算基底(可算個の部分集合からなる基底)をもたないことを示せ.

1.6. f を閉区間 [0, 1] で定義された実数値連続関数とする．このとき**リーマン和** (Riemann sum)

$$\sum_{j=0}^{r} (t_{j+1}-t_j)f(\tau_j)$$

ただし，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots < t_{r+1} = 1, t_j < \tau_j < t_{j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ により‘自然に’定義されるような，実数上のフィルター $\mathscr{F}$ があることを示せ．またそのフィルター $\mathscr{F}$ は，積分

$$\int_0^1 f(t)\,dt$$

に収束することを示せ.

1.7. 平面 $\mathbf{R}^2$ において，閉単位円板 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x^2+y^2 \leqslant 1\}$ の近傍フィルターは可算基底をもつことを示せ．(1.5 と比較せよ.)

1.8. $X_\alpha(\alpha \in A)$ を位相空間の族とする．その積集合

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

を考える．p_α を α 番目の座標軸 X_α への射影

$$p_\alpha : x = (x_\alpha) \mapsto x_\alpha$$

とする．X 上の**積位相** (product topology) とは，次のように定義されるものとする．X の部分集合 U が点 $x = (x_\alpha)$ の近傍であるとは，U が

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$$

なる形の集合を含むときにいう．ただし U_α は $x_\alpha \in X_\alpha$ の近傍であり，有限個の α を除いては $U_\alpha = X_\alpha$ なるものとする．このようにして定義された位相は，すべての p_α を連続にする X の位相のうちで，もっとも粗いものであることを示せ.

1.9. $\mathscr{F}$ を積空間 X (前問をみよ) 上のフィルターとする．$\mathscr{F}$ の p_α による像を $\mathscr{F}_\alpha$ とする．このとき $\mathscr{F}_\alpha = \{p_\alpha(M) ; M \in \mathscr{F}\}$ となることを示せ.

1.10. 集合 A が**準有向集合** (preordered set) であるとは，A 上に一つの**準順序関係** (preorder relation) が定義されていて，A の任意の二つの元 a, b に対して $a \leqslant c, b \leqslant c$ なる $c \in A$ が存在することをいう．[関係 $\leqslant$ が準順序関係であるとは，それが**反射的**

(reflexive) すなわち，すべての $a \in A$ に対して $a \leqslant a$；**推移的** (transitive) すなわち，$a \leqslant b$, $b \leqslant c$ ならば $a \leqslant c$ なることをいう．さらに $a \leqslant b$, $b \leqslant a$ ならば $a = b$ となるとき**順序関係** (order relation) という.][1] さて，集合 X 上のフィルター全体を Φ とし，準有向集合 A から X への写像の全体を Φ' とする．このとき Φ' から Φ の上への標準的写像が存在することを示せ．(この写像は1対1にはならない.) 特に準有向集合 A として，正の整数全体をとれば，A から X への一つの写像 f のこの標準写像による像は，X 上の点列に付随したフィルターとなる．

1) 準順序関係の定義された集合を preordered set とよぶべきである．ここではさらに条件があるので準有向集合と訳した．また順序の代りに半順序，準順序の代りに擬順序ともいう．

2.

ベクトル空間，線形写像

まず**ベクトル空間** (vector space) とは何であったかを思い出そう．われわれが考えるベクトル空間としては，二つの‘古典的な体’すなわち実数体 $\mathbf{R}$ または複素数体 $\mathbf{C}$ の上に定義されたものだけにかぎる．もし実数体 $\mathbf{R}$ の上だけに話を限定する必要のあるときには，いちいちそのことを述べる．特に断わらなければ，常に複素ベクトル空間ということにしておく．$\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とは，三つの対象物からなる系 $(E, A_v, M_s\}$ のことである．ここで E は集合であり，A_v, M_s は次のような写像である．

$$A_v : E\times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x+y,$$

$$M_s : \mathbf{C}\times E \to E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

もちろん，これらは幾つかの条件をみたさねばならない．写像 A_v は**ベクトル加法** (vector addition)とよばれ，可換群の演算規則である．すなわち次の性質をもつ．

(結合律) $$(x+y)+z = x+(y+z);$$

(可換律) $$x+y = y+x;$$

(零元の存在) ある元 ― それを 0 と書く ― が存在して，

$$\forall x \in E, \qquad x+0 = x;$$

(逆元の存在) 各元 $x \in E$ に対して一意的[1] に定まる E の元 ― それを $-x$ と書く ― が存在して　$x+(-x) = 0.$

---

1) 一意性は他の公理からしたがう

もちろん $x+(-y)$ の代りに $x-y$ とも書く. 写像 M_s は**スカラー乗法** (scalar multiplication) または**スカラー倍** (multiplication by scalars) とよばれ, 次の条件を満足する.

(i) $$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\,;$$

(ii) $$(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x\,;$$

(iii) $$1x = x\,;$$

(iv) $$0x = 0\,;$$

(v) $$\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y.$$

一次独立性, 基底, ベクトル (または線形) 部分空間などの諸概念を復習することは省略する[1]. E, F をベクトル空間としたとき, 写像 $f: E\to F$ が**線形** (linear) であるとは, 任意の $x, y\in E$, $\lambda, \mu\in \mathbf{C}$ に対して

$$f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$$

となることであった. 線形写像 $f: E\to F$ が1対1であるための必要十分条件は, $f(x)=0$ ならば $x=0$ となることであった. 実際 f が1対1なら $f(x)=0$ から $x=0$ になる. 逆に, $f(x)=0$ なら $x=0$ と仮定しよう. いま $x, y\in E$ とし, $f(x)=f(y)$ とすれば, $f(x-y)=f(x)-f(y)=0$, ゆえに $x-y=0$. すなわち1対1である.

商空間 (quotient space) については, 慣れていない読者があるかもしれない. これは後で重要になるから, 念のため復習しておこう.

E を ($\mathbf{C}$ 上の) ベクトル空間とし, M をその線形部分空間とする. E の二つの元 x, y に対して, 条件

$$x-y\in M$$

は一つの**同値関係** (equivalence relation) を定義する. 実際 $x-x=0\in M$ だから反射的 (どんな線形部分空間も0を含む), $x-y\in M$ から $y-x=-(x-y)\in M$ が出るから対称的 (ある元が線形部分空間に属すれば, その逆元も属する), $x-y\in M$, $y-z\in M$ から $x-z=(x-y)+(y-z)\in M$ が出るから推

1) これらの基本概念については線形代数の教科書参照.

移的 (線形部分空間が二つの元を含めば，その和も含む) である．したがって，**商集合** (quotient set) E/M が定義できる．それは，関係 $x-y \in M$ に関する**同値類** (equivalence classes) の集合である．E から E/M の上への‘標準的写像’が存在する．それは各元 $x \in E$ に対して x の属する同値類 (関係 $x-y \in M$ を法とする) を対応させる．

***M* を法とする** (modulo M) x の同値類 [すなわち $x-y \in M$ となるような y の全体] を，**線形多様体** (linear subvariety) として，目に見えるようにきちんと表現することは直観的理解を助けるだろう．実際それは

$$M+x = \{x'+x;\quad x' \in M\}$$

という集合であり，M を x だけ平行移動したものである．次のことに注意しよう．(M が線形空間であることを用いれば) 簡単にわかることである．

$$(2.1)\qquad x \sim y \bmod M,\ \lambda \in \mathbf{C} \Longrightarrow \lambda x \sim \lambda y \bmod M;$$

$$(2.2)\qquad x \sim y \bmod M,\ z \in E \Longrightarrow x+z \sim y+z \bmod M.$$

したがって E/M におけるベクトル加法とスカラー乗法が定義できる．すなわち，$\phi(x)$ で $x \bmod M$ なる同値類を表わせば，$\lambda\phi(x) = \phi(\lambda x)$，$\phi(x)+\phi(y) = \phi(x+y)$ とすればよい[1]．これらの定義は (2.1), (2.2) によって明確な定義になっている．このようにして，E/M はベクトル空間になり，$\phi: E \to E/M$ なる標準的写像は線形写像である．もちろん，上への写像である．

さて，E, F を ($\mathbf{C}$ 上の) 線形空間として，$f: E \to F$ を線形写像とする．f の像，それを $\mathrm{Im} f$ とかく，とは F の部分集合で

$$\mathrm{Im} f = \{y \in F;\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$$

と定義する．f の**核** (kernel of f)，それを $\mathrm{Ker} f$ とかく，は E の部分集合として

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in E;\ f(x) = 0\}$$

と定義する．$\mathrm{Im} f$，$\mathrm{Ker} f$ はそれぞれ F, E の線形部分空間である．

---

1) $x \sim x' \bmod M$，$u \sim u' \bmod M$ から $x+u \sim x'+u' \bmod M$ が出る．それは (2.2) を二度用いて

$$x+u \sim x+u' \sim x'+u'.$$

さて，次の**図式** (diagram) をみよう．

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & \mathrm{Im}\, f & \xrightarrow{i} & F \\ \phi \downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & & & \\ E/\mathrm{Ker}\, f & & & & \end{array}$$

ここで i は $\mathrm{Im}\, f$ から F への '自然な' 1対1写像[1]，すなわち $\mathrm{Im}\, f$ の各元 y に対してその同じ y を F の元とみて対応させる写像である．ϕ は E からその商空間 $E/\mathrm{Ker}\, f$ の上への標準的写像である．写像 $\bar{f}$ はこの図式が**可換** (commutative) になるように定義する．すなわち，$x \in E$ の f による像 $f(x)$ が，$\bar{f}$ による $\phi(x)$ (x の $\mathrm{mod}\,\mathrm{Ker}\, f$ による同値類) の像 $\bar{f}(\phi(x))$ と一致するようにする．$\bar{f}$ は方程式

$$\bar{f}(\phi(x)) = f(x)$$

により疑義なく定義される (well-defined)．実際，$\phi(x) = \phi(y)$ ならば $x-y \in \mathrm{Ker}\, f$，したがって $f(x) = f(y)$ となるからよい．f が線形なことと，商空間 $E/\mathrm{Ker}\, f$ の線形構造から $\bar{f}$ も線形になることはただちにわかる．$\bar{f}$ は $E/\mathrm{Ker}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$ の上への，1対1の線形写像である，上への写像であることは，$\mathrm{Im}\, f$ および $\bar{f}$ の定義から明らか．1対1であることは次のようにしてわかる．もし $\bar{f}(\phi(x)) = \bar{f}(\phi(y))$ ならば $f(x) = f(y)$ だから，$f(x-y) = 0$ すなわち $x-y \in \mathrm{Ker}\, f$．よって $\phi(x) = \phi(y)$．

E を任意の (必ずしもベクトル空間ではない) 集合とし，F はベクトル空間とする．$\mathscr{F}(E;F)$ を E から F へのすべての写像の集合とする．$\mathscr{F}(E;F)$ にはベクトル空間の構造を自然に入れることができる．まず二つの写像 $f, g : E \to F$ の和の定義をしよう．和も写像のはずだから，各点での値を決めねばならない．これは $f(x)$ と $g(x)$ の和とするのが自然であろう．すなわち

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

これが和の定義である．同様に，スカラー λ に対して λf の $x \in E$ における

---

1) injection または injective mapping の最初の文字 i を用いている．inclusion mapping (包含写像) の i と思ってもよい．

値は

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

とする（これが定義）．

E もベクトル空間（F とおなじスカラー体をもつとする．すなわち，われわれの場合は複素数体 $\mathbf{C}$）のときには，特に E から F への線形写像の全体に興味がある．これを $\mathscr{L}(E;F)$ で示す．$\mathscr{L}(E;F)$ はただちにわかるように，$\mathscr{F}(E;F)$ の線形部分空間になる．

$F=\mathbf{C}$ のとき，$\mathscr{L}(E;F)$を E^* と書いて，E の**代数的双対** (algebraic dual of E) という．[代数的双対空間ともいう]．E が位相ベクトル空間のときには(次章を参照)‘もっと小さな’双対（空間），すなわち $E \to \mathbf{C}$ なる線形写像（E^* の元）のうちで連続なものの全体を考える．これを E' で表わし E の**双対**（または双対空間）(dual of E) という．E' は E^* の線形部分空間になる．（E が有限次元でなければ）E^* と E' とは注意して区別しなければならない.[1] E^* の元は通例 E 上の**線形汎関数** (linear functional) または**線形形式(一次形式)** (linear form) とよばれる．

E, F, G を三つのベクトル空間（$\mathbf{C}$ 上の）とし，$u: E \to F$，$v: F \to G$ を線形写像とする．その**合成** (compose) $v \circ u$ は

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)), \qquad x \in E$$

で定義されるが，E から G への線形写像となる．もし $G=\mathbf{C}$ ならば，v は F 上の線形汎関数すなわち F の代数的双対の元 x^* となる．合成 $x^* \circ u$ は E 上の線形汎関数である．このようにして $u \in \mathscr{L}(E;F)$ に対して，$x^* \mapsto x^* \circ u$ という F^* から E^* への写像を得る．この写像が線形であることは見やすい．これを u の**代数的転置** (algebraic transpose)（または**代数的転置写像**）という．これを u^* と書く．このようにして $u \mapsto u^*$ という $\mathscr{L}(E;F)$ から $\mathscr{L}(F^*, E^*)$ への線形写像ができる．

---

1) E が有限次元でさらに E の位相が Hausdorff なら $E'=E^*$.

演 習 問 題

2.1. 次のような例を作れ．Eはベクトル空間，u，vはEからEへの線形写像で，

(i) uは**単射的**(injective,'1対1' のこと)だが**全射的**(surjective,上への)でない．

(ii) vは全射的だが単射的でない．

2.2. Eをベクトル空間，Mをその線形部分空間，Fをベクトル空間とし，uをMからFへの線形写像とする．このとき，線形写像 $\boldsymbol{u}: E \to F$ であってuの延長となっているもの，すなわち $u(x) = v(x)$，$x \in M$ となるものが存在することを示せ．

2.3. E, Fを二つのベクトル空間とし，$v: E \to F$ を線形写像，$u^*: F^* \to E^*$ をその代数的転置とする．このとき次の条件は同値であることを示せ．

(a) uは**全射**(surjection，全射的写像)．

(b) u^*は**単射**(injection，単射的写像)．

2.4. E, Fをベクトル空間，$u: E \to F$ を線形写像とする．またM, NをそれぞれE, Fの線形部分空間とし，ϕ, ψをそれぞれE, Fから$E/M, F/N$への標準的写像とする．このとき次の二つの条件は同値であることを示せ．

(a) $u(M) \subseteq N$

(b) 次の図式が可換になるような線形写像vが存在する．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \phi\downarrow & & \downarrow\psi \\ E/M & \xrightarrow{v} & F/N \end{array}$$

ここでvは一意的に定まることも示せ．

2.5. MをEの線形部分空間，jをMからEへの自然な単射(20頁)とし，ϕをEからE/Mへの標準的写像とする．また

$$M^\perp = \{x^* \in E^*\,;\ \forall x \in M,\ x^*(x) = 0\}$$

と置く[$\perp$は'直交'の記号，$x^*(x) = 0$ のとき $x^* \perp x$ とも書く]．このとき

(i) 次の図式が可換になるような線形写像kが存在することを示せ．

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{j^*} & M^* \\ \psi^*\downarrow & \nearrow k & \\ E^*/M^\perp & & \end{array}$$

ここでψ^*は商空間への標準的写像である．さらにkは**全射的同形写像**(isomorphism onto)であることを示せ．

(ii) $\phi^*: (E/M)^* \to E^*$ は1対1で，かつϕ^*の像$\phi^*((E/M)^*)$は$M^\perp$に一致するこ

とを示せ．

2.6. $E_\alpha(\alpha \in A)$ を複素数体上のベクトル空間の族とし，その積空間

$$E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$$

を考える．Eはベクトル加法およびスカラー乗法をその成分ごとに（座標ごとに）考えることによってベクトル空間の構造をもつ．E_α $(\alpha \in A)$ の**直和** (direct sum) はEの元 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ のうち有限個の α を除いて x_α が 0 であるようなものの全体である．この直和を E_0 で表わそう．このとき E_0 の代数的双対 $E_0{}^*$ と，E_α の代数的双対 $E_\alpha{}^*$ の直積 $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha{}^*$ の間には標準的同形写像が存在することを示せ．

2.7. 前問の記号をそのまま用いる．$\alpha \in A$ に対し，j_α を E_α から E への線形写像として次のように定義しよう．$z \in E_\alpha$ としたとき $j_\alpha(z)$ は E の元 $x = (x_\beta)_{\beta \in A}$ であって，$\beta \neq \alpha$ なら $x_\beta = 0$，$\beta = \alpha$ なら $x_\alpha = z$ とする．明らかに j_α は1対1である．また p_α を**座標空間への射影** (coordinate projection) $x = (x_\beta) \mapsto x_\alpha$ とする．$p_\alpha \circ j_\alpha = (E_\alpha$ の恒等写像)．いま $j_\alpha{}^* : E^* \to E_\alpha{}^*$ を j_α の代数的双対として，E^* から積空間 $\widetilde{E}^* = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha{}^*$ への線形写像 j^* を次のように決める．

$$E^* \ni x^* \mapsto j^*(x^*) = (j_\alpha{}^*(x^*))_{\alpha \in A} \in \widetilde{E^*}$$

このとき次の三つの条件は同値であることを説明せよ．

(a) 添字の集合 A は有限集合である．

(b) j^* は1対1である．

(c) j^* は E^* から $\widetilde{E}^*$ の上への同形写像である．

2.8. 任意のベクトル空間は，一次元のベクトル空間の族の直和に同形であることを証明せよ．さらに問題2.6, 2.7の結果を用いて，次の条件の同値であることを示せ．

(a) Eは有限次元である．

(b) 標準写像

$$x \mapsto (x^* \mapsto x^*(x))$$

はEから，その代数的双対 E^* の代数的双対 E^{**} の上への同形写像である．

3.

位相ベクトル空間の定義

E を複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする (これを単にベクトル空間という).
そして,

$$A_v : E\times E \to E, \quad (x,y)\mapsto x+y;$$
$$M_s : \mathbf{C}\times E \to E, \quad (\lambda, x)\mapsto \lambda x$$

を E におけるベクトル加法, スカラー乗法とする. E 上の一つの位相 $\mathcal{T}$ が E の線形構造と整合する (compatible with the linear structure of E) とは, E に位相 $\mathcal{T}$, $E\times E$ には積位相 $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$, $\mathbf{C}\times E$ には積位相 $\mathcal{C}\times\mathcal{T}$ [ただし $\mathcal{C}$ は $\mathbf{C}$ の普通の位相] を入れたとき, A_v, M_s が連続になることをいう. **積位相** (product topology) の定義を復習しよう. 二つの位相空間 E, F を考える. $E\times F$ 上の (積) 位相を定義するには, $E\times F$ の各点 (x,y) の近傍フィルターの基底を定めればよい, 基底として, **矩形** (rectangle)[1)]

$$U\times V=\{(x',y')\in E\times F;\ x'\in U, y'\in V\}$$

の全体をとる. ここで U, V はそれぞれ E, F における x, y の近傍とする. これら矩形の全体がフィルター基底となることは見やすい. しかし一般にはフィルターにはならない. なぜなら, 矩形を含む集合というだけでは, 矩形にならないからである. このようにして各点 (x,y) に対して定義されたフィルターが $E\times F$ 上の一つの位相の近傍フィルターと見なし得ること (すなわち 9 頁の公理 (N_2) をみたすこと) を確かめねばならない. これは読者に委せることにし

1) E, F をそれぞれ座標軸のように考え, U, V を線分のように想像すれば, $U\times V$ はちょうど矩形に当ることからきた用語. $U=V$ なら正方形ということになる.

よう．位相 $\mathscr{C}$ は複素平面 $\mathbf{C}$ の各点 λ に，その点を中心とする（正の半径をもつ）開または閉平板を基本近傍系にとる．E の位相がその線形構造と整合するならば，E は**位相ベクトル空間** (topological vector space) となる．位相ベクトル空間を略して **TVS** と書く．

E を一つの TVS としよう．するとその位相は“平行移動に関して不変” (translation invariant) である．これは粗らくいえば，E のどの点のまわりも，位相的には他の点のまわりと同じに見えるということである．もっと正確にいえば，V が零元の近傍フィルター $\mathscr{F}(0)$ のなか（全体）を動いたときに $V+x$ が点 x の近傍フィルター $\mathscr{F}(x)$ をつくす，すなわち

$$\mathscr{F}(x)=\{V+x\,;\,V\in\mathscr{F}(0)\}$$

ということである．

その証明：U を x の任意の近傍とする．まず写像 $A_v:(x,y)\mapsto x+y$ の連続性から直ちにわかるように，写像 $y\mapsto y+x$ は E から E 自身（の上へ）の連続写像である．したがって，この写像による U の逆像は，この写像による x の逆像（それは明らかに零元 0 である）の近傍となる．いま U の逆像を V とすれば $U=V+x$，逆に V を 0 の任意の近傍とすると，対称性あるいは写像 $y\mapsto y-x$ の連続性によって，$V+x$ は x の近傍になる．このようにして，“位相ベクトル空間 E の位相を調べるには，原点 0 の近傍フィルターを知れば十分である”．実際上（位相ベクトル空間を作るときには）原点の近傍フィルターまたは（しばしば）このフィルターの基底をあたえることから始めるのが通例である．したがって，あたえられたフィルターが E の線形構造と整合する位相による原点の近傍フィルターであるかどうかの判定条件が必要になる．

定理 3.1. $\mathscr{F}$ をベクトル空間E上の一つのフィルターとする．このとき $\mathscr{F}$ が E の線形構造と整合する一つの位相による原点の近傍フィルターであるためには，次の諸条件をみたすことが必要十分である．

(3.1)　$\mathscr{F}$ に属するすべての部分集合 U は原点を含む．

(3.2)　任意の $U\in\mathscr{F}$ に対し適当な $V\in\mathscr{F}$ が存在して，

$$V+V \subseteq U$$

となる．

(3.3)　任意の $U \in \mathscr{F}$ と任意の $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$ に対して

$$\lambda U \in \mathscr{F}$$

(3.4)　どんな $U \in \mathscr{F}$ も**吸収的** (absorbing) である．

(3.5)　どんな $U \in \mathscr{F}$ も**平衡的** (balanced) $V \in \mathscr{F}$ を含む．

ここで二つの術語：吸収的，平衡的を使った．その定義を述べよう．

定義 3.1. ベクトル空間 E の部分集合 A が**吸収的**であるとは，各 $x \in E$ に対して正数 $c_x > 0$ が存在して，$|\lambda| \leqslant c_x$ なるすべての $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して $\lambda x \in A$ となることをいう．

少し不正確だが，もっと感覚にうったえるいい方をすれば，A が吸収的であるとは，A を**膨張** (dilatation) させれば，E の任意の点を吸い込んでしまうことをいう．

定義 3.2. ベクトル空間 E の部分集合 A が**平衡的**であるとは，任意の $x \in A$ と任意の $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leqslant 1$ に対して $\lambda x \in A$ となることをいう．

複素平面 $\mathbf{C}$ の平衡的な部分集合は，原点を中心とする (開または閉) 円板だけである [1]．

定理 3.1 の証明　まず条件 (3.1)—(3.5) の必要性から始める．(3.1) が必要なことは明らか．

(3.2) の必要性　$V+V$ は x, y が V を動いたときの点 $x+y$ のなす集合である．U を 0 の任意の近傍としよう．写像 $(x, y) \mapsto x+y$ による U の逆像は，この写像の連続性から，$(0,0) \in E \times E$ の近傍である．したがって，それは矩形近傍 $W \times W'$ を含む (ただし W, W' は E の 0 の近傍である)．ゆえにそれは正方形近傍 $(W \cap W') \times (W \cap W')$ を含む．$V = W \cap W'$ と置けば，

1)　詳しくいえば，正の半径をもった (開または閉) 円板になるか，あるいは空集合，全平面，原点だけのいずれかになる．

$V+V\subseteq U$.

(3.3) の必要性　λU は x が U を動くときに得られる λx の集合である．$\mathbf{C}\times E$ から E への写像 $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ の連続性から，$\lambda\in\mathbf{C}$ $\lambda\neq 0$ を固定したときに得られる写像 $x\mapsto\lambda^{-1}x$ は連続．したがって，この写像による U の逆像 λU は 0 の近傍である．

(3.4) の必要性　これも写像 $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ の連続性による．x を任意に固定して $\lambda\mapsto\lambda x$ の連続性を用いると，$0\in\mathbf{C}$ は $0\in E$ にうつるから，この写像による U の逆像 N は $0\in\mathbf{C}$ の近傍である．したがって N は複素平面の 0 を中心とする一つの円板 $D_\rho=\{\lambda\in\mathbf{C};|\lambda|\leqslant\rho\},\rho>0$ を含む．すなわち $|\lambda|\leqslant\rho$ なら $\lambda x\in U$.

(3.5) の必要性　今度は写像 $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ の点 $(0,0)$ における連続性に着目して，上述の (3.4) の場合の記号を用いれば，U の逆像は適当な $\rho>0$ に対する円板 D_ρ と $0\in E$ の近傍 W に対して矩形 $D_\rho\times W$ を含むことになる．そこで

$$V=\bigcup_{|\lambda|<\rho}\lambda W$$

が U に含まれる．この V は明らかに平衡的であり，また 0 の近傍でもある (なぜなら，$\lambda\neq 0$ のとき λW が 0 の近傍だから).

条件 (3.1)—(3.5) の十分性　まず始めに E の任意の点 x の近傍フィルターとして，あたえられた $\mathscr{F}$ を平行移動 $y\mapsto x+y$ でうつした像を考える．これが実際に E の一つの位相を定義していることを証明し，さらにその位相が E の線形構造と整合していることを示さねばならない．平行移動 $y\mapsto x+y$ による $\mathscr{F}$ の像を $\mathscr{F}(x)$ と書こう．すなわち $\mathscr{F}(x)=\{U+x;U\in\mathscr{F}\}$ とする．まず $0\in U$ だから x は $U+x$ に属する．すなわち 9 頁の公理 (N_1) はみたされている．$V\in\mathscr{F}$ を $V+V\subseteq U$ なるようにとる．y を $V+x$ の勝手な点としよう．$U+x$ は $V+(V+x)$ を含むからもちろん $V+y$ を含む．ところが $V+y\in\mathscr{F}(y)$ だから $U+x$ も $\mathscr{F}(y)$ に属する．すなわち 9 頁の公理 (N_2) は，そこにおける U,V の代りに $U+x$, $V+x$ を考えれば満足されている．このようにして実際に E の一つの位相を得たことになる．残るところは写像 A_v, M_s の連続性であ

る．A_v の連続性も (3.2) からただちに得られる．実際 (x, y) を $E\times E$ の点とし W を A_v による像 $x+y$ の近傍とする．$W=U+x+y,\ U\in\mathscr{F}$ としてよい．$V\in\mathscr{F}$ を $V+V\subseteq U$ なるように選ぶ．すると $(V+x)+(V+y)\subseteq W$．これは点 (x, y) の近傍

$$(V+x)\times(V+y)$$

の像が W に含まれることを示している．すなわち W の逆像は (x, y) の近傍を含むからそれ自身 (x, y) の近傍である[1)]．

最後にスカラー乗法

$$M_s:(\lambda, x)\mapsto\lambda x$$

の連続性を証明しよう．U' を λ_0x_0 の近傍とする．U' は $U+\lambda_0x_0,\ U\in\mathscr{F}$ なる形である．そこで $W\in\mathscr{F}$ を次の二条件をみたすようにする

(1)　　$$W+W+W\subseteq U$$

(2)　　W は平衡的．

このような W の存在は (3.2) と (3.5) から出る．(3.4) から W は吸収的であり，したがって $\rho>0$ が存在して

$$\lambda\in\mathbf{C},\ |\lambda|\leqslant\rho\ \text{ならば}\ \lambda x_0\in W$$

となる．ここでさらに $\rho\leqslant 1$ と仮定してもよいことは明らか．$0<\rho\leqslant 1$ として D_ρ を複素平面の原点中心の半径 ρ の円板としよう．証明は $\lambda_0=0$ と $\lambda_0\neq 0$ の二つの場合にわけて行なう．まず $\lambda_0=0$ とすると $\lambda_0x_0=0$．ゆえに $U'=U$．このとき集合 $D_\rho\times(W+x_0)$ の M_s による像は集合

(3.6)　　$$\{\lambda y+\lambda x_0;\ |\lambda|\leqslant\rho,\ y\in W\}$$

となる．$|\lambda|\leqslant\rho\leqslant 1$ と W が平衡的なことから，$y\in W$ より $\lambda y\in W$ となる．また $|\lambda|\leqslant\rho$ より（ρ の定義から）$\lambda x_0\in W$ である．したがって集合 (3.6) は $W+W$ に含まれることになり，U に含まれる．これは U の逆像が $D_\rho\times(W+x_0)$ を含み $(0, x_0)$ の近傍となる．次に $\lambda_0\neq 0$ の場合を考える．次の集合を

1)　結局，条件 (3.1), (3.2) だけから x の近傍フィルターを $\mathscr{F}(x)=\{U+x;\ U\in\mathscr{F}\}$ とする位相の存在がわかり，さらに加法 A_v の連続性も出た．残りの条件 (3.3), (3.4), (3.5) はスカラー乗法 M_s の連続性のために要るのである．

考察する.

(3.7) $$(D_\sigma+\lambda_0)\times(|\lambda_0|^{-1}W+x_0)$$

ここで $\sigma=\inf(\rho,|\lambda_0|)$ すなわち $\rho_0,|\lambda_0|$ の小さい方を σ とする. このとき (3.7) の M_s による像は

(3.8) $$\{\lambda|\lambda_0|^{-1}y+\lambda x_0+\lambda_0|\lambda_0|^{-1}y+\lambda_0x_0\,;\,|\lambda|\leqslant\sigma, y\in W\}$$

となる. $\lambda|\lambda_0|^{-1}$, $\lambda_0|\lambda_0|^{-1}$ は絶対値が $\leqslant 1$ だから W が平衡的を考慮すると

$$\lambda|\lambda_0|^{-1}y+\lambda_0|\lambda_0|^{-1}y$$

は $W+W$ に属する. また $|\lambda|\leqslant\sigma\leqslant\rho$ より $\lambda x_0\in W$ となるから, 集合 (3.8) は

$$W+W+W+\lambda_0x_0\subseteq U+\lambda_0x_0$$

に含まれる. すなわち $U+\lambda_0x_0$ の逆像は (3.7) を含みしたがって (λ_0,x_0) の近傍である. (証終)

TVS の原点の近傍フィルターのもつ次の性質は重要である.

命題 3.1. E を TVS とすれば, 0の近傍フィルターの基底で閉集合のみからなるものが存在する.

証 明 E における0の任意の近傍 U が0の閉じた近傍を含むことをいえばよい. いま V を0の近傍で $V-V\subseteq U$ なるものとする. このとき $\bar{V}\subseteq U$ となる. 実際 $x\in\bar{V}$ とすると, x のどんな近傍も V と交わる. 特に $(V+x)\cap V\neq\emptyset$. ゆえに $y,z\in V$ が存在して, $z=x+y$ となる. これから

$$x=z-y\in V-V\subseteq U.$$

系 E の0の基本近傍系として, 平衡的閉集合からなるものが存在する.

証 明 E の0の近傍 U をとれば, それは0の閉近傍 V を含む, V はまた平衡的近傍 W を含む, このとき $\bar{W}$ は平衡的かつ閉で $\bar{W}\subseteq V\subset U$ (証終).

次のことを注意しておこう. 証明はやさしいから読者にまかせる. E を任意のベクトル空間としたとき, 自明位相 (10頁) は常に E の線形構造と整合す

る．離散位相は E が一点（すなわち原点）だけからなる場合を除けば，線形構造と整合することは決してない．

例 一変数 X の複素係数の**形式的巾**（べき）**級数**[1] (formal power series) の全体がなす環を $\mathbf{C}[[X]]$ で表わす．形式的巾級数 u とは

$$u = u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$$

なる無限級数のことである．ここで係数 u_n は複素数とする．これは関数論にでてくる巾級数と同じであるが，収束するかどうかを問題にしない．したがって本質的には任意の複素数列 $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ を考えるのと同じである．加法と乗法は多項式や解析関数を原点のまわりで考えた **Taylor 展開** (Taylor expansion) のときと同じように定義される．すなわち

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$$

をもう一つの形式的巾級数としたとき

$$u+v = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) X^n$$

$$uv = \sum_{n,p=0}^{\infty} u_n v_p X^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p \right) X^n$$

と定義する．スカラー倍も同様に

$$\lambda u = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n) X^n$$

とする．加法とスカラー乗法によって $\mathbf{C}[[X]]$ はベクトル空間となる．形式的巾級数の乗法も考え合せると**代数** (algebra) である．この代数は**単位元** (unit element) をもつ．単位元は形式的巾級数 1，すなわち形式的巾級数 u であって係数が $u_0 = 1$，$u_n = 0$ $(n \geqq 1)$ となるものである．次の事実も見やすい．

“形式的巾級数 u が**逆元** (inverse) をもつための必要十分な条件は，その最初の係数 u_0 が 0 でないことである”．

---

[1] 冪（べき）の代りに巾を用いる［高木貞治 ‘解析概論’（岩波書店）による］．

いま $\mathfrak{M}$ を $\mathbf{C}[[X]]$ の元で逆をもたないものの全体としよう．すなわち $\mathfrak{M}$ は $\mathbf{C}[[X]]$ の元 u で $u_0=0$ なるものの全体とする．$\mathfrak{M}$ は代数 $\mathbf{C}[[X]]$ の**イデアル** (ideal) である．という意味は，次の二つの条件を満足していることである．

(1) $\mathfrak{M}$ は $\mathbf{C}[[X]]$ の部分ベクトル空間である．

(2) 任意の $u \in \mathfrak{M}$ と任意の $v \in \mathbf{C}[[X]]$ に対し $uv \in \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$ がこれらの条件をみたすことは明らか．さらに読者は $\mathfrak{M}$ が最大の真の ($\mathbf{C}[[X]]$ 全体とは異なるという意味で**真の** (proper)) イデアルになることを容易に検証することができよう．実際そのためには次のことに注意すればよい．もし $\mathfrak{M}$ に含まれないイデアルがあったとすると，それは**可逆元** (invertible element すなわち乗法に関する逆元をもつような元) を含むはずであり (2) によって 1 を含み，したがって $\mathbf{C}[[X]]$ 全体に一致してしまう．

$n>1$ として $\mathfrak{M}^n$ を形式的巾級数 u で $p<n$ のとき $u_p=0$ となるものの全体とする．$\mathfrak{M}^n$ の元は

$$u(X)=X^{n-1}\cdot v(X)$$

と書ける，ただし $v \in \mathfrak{M}$. 巾級数 X (すなわち X^1 の係数が 1 で他の係数は全部 0 となる巾級数) は明らかに $\mathfrak{M}$ の元だから，$\mathfrak{M}^n$ の各元は $\mathfrak{M}$ の元の n 個の積となり，$\mathfrak{M}^n$ という記号の正当なことがわかる．$\mathfrak{M}^n$ もまた $\mathbf{C}[[X]]$ のイデアルになることは容易に検証できる．$n\to\infty$ としたときに，すべての $\mathfrak{M}^n$ の共通部分は零巾級数 (すべての係数が 0 のもの) だけからなることは明らか．

集合の列

$$\mathfrak{M}^0=\mathbf{C}[[X]]\supseteq\mathfrak{M}^1\supseteq\mathfrak{M}^2\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{M}^n\supseteq\cdots$$

は包含関係によって**全順序づけられ** (totally ordered) ているが，これが 8 頁の公理 (BF) をみたすことは明らか．そこで，この集合列が生成するフィルターを $\mathscr{F}$ とする．形式的巾級数の集合 U が $\mathscr{F}$ に属するのは，十分大きな n に対して $U\supseteq\mathfrak{M}^n$ となるときである．いま u を任意の形式的巾級数とし $\mathfrak{M}^n+u$ で $v+u$, $v\in\mathfrak{M}^n$ なる形式的巾級数の全体を表わそう．$\mathfrak{M}^n+u$, $n=0,1,2,\ldots$ で生成されるフィルターを $\mathscr{F}(u)$ と書く．さて $\mathscr{F}$ が定理 3.1 の条件 (3.2) を満足することを見よう．実際各 $\mathfrak{M}^n$ は部分ベクトル空間であるから

$$(3.9)\qquad \mathfrak{M}^n+\mathfrak{M}^n \subseteq \mathfrak{M}^n$$

は明らか．このことから $\mathscr{F}(u)$ は $\mathbf{C}[[X]]$ 上の一つの位相に関する点 u の近傍フィルターとなる[1]．

また，$v\in\mathfrak{M}^n+u$ とすると $\mathfrak{M}^n+u\supseteq\mathfrak{M}^n+v$ となるから $\mathfrak{M}^n+u$ は v の近傍である．すなわち $\mathfrak{M}^n+u$ はその各点の近傍であり，したがって開集合である．

また，$u, v\in\mathbf{C}[[X]]$ を任意に定めたとき，集合

$$\mathfrak{M}^n+u+v$$

の加法写像 (それを位相空間 $\mathbf{C}[[X]]\times\mathbf{C}[[X]]$ から位相空間 $\mathbf{C}[[X]]$ への写像とみる) による逆像は，条件 (3.9) から

$$(\mathfrak{M}^n+u)\times(\mathfrak{M}^n+v)$$

を含み，したがって点 (u, v) の近傍となる．これは加法の連続性を示している[2]．

乗法写像

$$\mathbf{C}[[X]]\times\mathbf{C}[[X]]\mapsto\mathbf{C}[[X]] : (u, v)\mapsto uv$$

の連続性は明らかな包含関係

$$\mathfrak{M}^p\mathfrak{M}^q\subseteq\mathfrak{M}^{p+q}$$

から出る．この左辺は $u\in\mathfrak{M}^p$，$v\in\mathfrak{M}^q$ の積 uv の全体からなる集合を意味する．

加法，乗法ともに連続だから $\mathbf{C}[[X]]$ はいわゆる**位相環** (topological ring) になる．

しかしながら，"$\mathbf{C}[[X]]$ は位相ベクトル空間にはならない"．その理由は，原点の近傍であって吸収的でないものが存在するからである．実際 $n\geqslant 1$ なら $\mathfrak{M}^n$ は吸収的でない．なぜなら $\lambda\neq 0$ で $\lambda\cdot 1\in\mathfrak{M}$ となるような $\lambda\in\mathbf{C}$ は存在しないからである．したがってスカラー乗法 $(\lambda, u)\mapsto\lambda u$ は，$\mathbf{C}\times\mathbf{C}[[X]]$ から $\mathbf{C}[[X]]$ への写像としては連続にならない．(しかし，λ を $u_0=\lambda$，$u_p=0$

---

1) 28頁の脚注参照，この場合条件 (3.1) は明白．

2) 加法の連続性だけならばすでにわかっている (28頁脚注)．ここの議論の面白さは，この位相の特異性であろう．これがいわゆる **Krull 位相** (Krull topology) である．

$(p>0)$ となる形式的巾級数 u と同一視して，スカラー倍を $\mathbf{C}[[X]]\times\mathbf{C}[[X]]$ から $\mathbf{C}[[X]]$ への乗法写像の $\mathbf{C}\times\mathbf{C}[[X]]$ への制限と見るならば連続になっている.)[1)]

また，$\mathfrak{M}^n$ は開集合であった．これは部分ベクトル空間でもある．ところで次のことが成り立つ.

命題 3.2. E を TVS とし M をその部分ベクトル空間で開集合とすると $M=E$ である.

証　明　実際 M は開集合だからその各点の近傍であり，とくに原点の近傍である．したがって吸収的 (定理 3.1 の条件 (3.4))．ところで $\lambda x\in M$, $\lambda\neq 0$ なら $x=\lambda^{-1}(\lambda x)\in M$. ゆえに $M=E$ (証終).

ところで，イデアル $\mathfrak{M}^n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ はすべて閉集合であることも見やすい[2)]. すなわち 0 の基本近傍系 $\{\mathfrak{M}^n\,;\,n=0,1,2,\ldots\}$ は閉かつ開なる集合から成っている (演習問題 3.4 参照).

上に述べた位相は実際に代数学で利用されている．この位相に関して，各点は近傍の可算基底[3)] をもっていることに注意しておこう.

$\mathbf{C}[[X]]$ の線形構造と整合するような別の位相が存在する．それは**係数の単純収束の位相** (topology of simple covergence of the coefficients) である．この位相に関して，形成的巾級数 $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_nX^n$ [の列またはフィルター] が一つの形式的巾級数に収束するとは，各々の固定した n について，複素数 u_n [の列またはフィルター] が v_n に収束することをいう．前に述べた位相に関して u が v に収束するには，$u_n=v_n$, $n<p$ となる整数 p が $p\to\infty$ となることであった．これから明らかに係数の単純収束が従うから，イデアル列 $\{\mathfrak{M}^n\}$ によ

1) これは，スカラーを形式的巾級数とみなすことによって $\mathbf{C}$ を $\mathbf{C}[[X]]$ の部分集合と見たときに，$\mathbf{C}[[X]]$ の位相を $\mathbf{C}$ に制限したものが $\mathbf{C}$ の離散位相となり $\mathbf{C}$ の普通の位相になっていないことからくる.

2) 同値関係 mod $\mathfrak{M}^n$ の各同値類がすべて開集合だから $\mathfrak{M}^n$ の補集合はそれらの一つの合併として開になり，したがって $\mathfrak{M}^n$ は閉集合.

3) 可算ケの集合からなる基本近傍系.

って定義された [Krull] 位相は係数の単純収束の位相よりも細かい (同じ集合上の二つの位相 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ について，$\mathcal{T}$ に関する収束フィルターが常に $\mathcal{T}'$ に関して収束するならば，$\mathcal{T}$ は明らかに $\mathcal{T}'$ より細かい).

さて，係数の単純収束の位相を正確に述べよう．ベクトル空間上に線形構造と整合する位相を入れるには，0 の基本近傍系をあたえるとよい．(この方法はこれからも常に用いる.) いまの場合それは形式的巾級数の次のような集合全体とする．

$$V_{m,n}=\left\{u=\sum_{n=0}^{\infty}u_nX^n\in \mathbf{C}[[X]]\,;\ \forall\ p\leqslant n,\ |u_p|\leqslant 1/m\right\}$$

ここで m, n は整数 $n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots.$ 基底 $\{V_{m,n}\}$ で生成されるフィルター $\mathcal{F}$ が条件 (3.1)-(3.5) を満足することは，演習問題として読者の検証にまかせる．$\{V_{m,n}\}$ が実際にフィルター基底をなすことは，

$$V_{m,n}\cap V_{m',n'}\supseteq V_{\sup(m,m'),\ \sup(n,n')}$$

からただちに出る. $\sup(a,b)$ は a,b の大きい方を表わす. $\{u^{(\nu)}\}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ を形式的巾級数の列としよう．この列が形式的巾級数 u に収束するためには，任意の整数の組 (m,n), $m\geqslant 1$, $n\geqslant 0$ に対して $\nu(m,n)\geqslant 1$ が存在して

$$\nu\geqslant\nu(m,n)\quad ならば\quad u^{(\nu)}\in V_{m,n}+u$$

となることが必要十分である．これは粗らくいえば，$u^{(\nu)}$ の各係数のうち u の対応する係数に近づくもの [すなわち，そのような係数の番号の集合] がどんどん増してゆくことを意味する．これが “係数の単純収束の位相” という名称の由来である．この位相に関してイデアル $\mathfrak{M}^n$ は閉集合である．これはただちにわかる (形式的巾級数 u が $p<n$ なるとき $v_p=0$ となるような形式的巾級数 v の極限になっているならば，u の各係数は v の対応する係数の極限になるから $p<n$ のとき $u_p=0$ になる)．しかしながら，命題3.2により，開集合ではない．また，係数の単純収束の位相に関して，原点0，したがって各点が近傍の ‘可算基底’ を持っていることに注意しておこう．このことは前に述べた [イデアル $\mathfrak{M}^n$ による] 位相についても同様であった．

演 習 問 題

3.1. Xを集合とし，各$x \in X$にそれぞれ位相ベクトル空間E_xを対応させる．xがXを動いたときのE_xの**素和**(disjoint union)[1]を$\mathbf{E}$とする．$\Gamma(X;\mathbf{E})$によって，Xから$\mathbf{E}$への写像fであって$f(x) \in E_x$となるものの全体を表わす．このとき$\Gamma(x;\mathbf{E})$には‘自然な’ベクトル空間の構造が入ることを示せ．次に，SをXの有限部分集合とし，各$x \in S$に対してE_xの0の近傍U_xを定めておく．そして$\Gamma(X;\mathbf{E})$の部分集合として

$$\{f \in \Gamma(X;\mathbf{E})\ ;\ \forall x \in S,\ f(x) \in U_x\}$$

を考える．Sとそれに対応するU_xの選び方をあらゆる仕方で変えたときに得られる上述の$\Gamma(X;\mathbf{E})$の部分集合の全体が，$\Gamma(X;\mathbf{E})$の線形構造と整合する一つの位相に関する$0 \in \Gamma(X;\mathbf{E})$の基本近傍系になることを証明せよ．これを**$X$上の各点収束の位相**(topology of pointwise convergence in X)という．

3.2. 複素数体上の位相ベクトル空間Eにおいて，ϕおよびEと異なる部分集合が開かつ閉になることはない．これを証明せよ．

3.3. Eをベクトル空間，$\{E_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$を位相ベクトル空間の族とする．各αに対し，H_αをEからE_αへの線形写像の一つの集合とする．このとき，Eの線形構造と整合する位相であって，すべてのH_αの元を連続にするようなものが存在することを示せ．そのような位相のうちで最も粗らいものはどんなものかを述べよ．(この位相を，写像集合族$\{H_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$によるE_α $(\alpha \in A)$の位相の**射影的極限**(projective limit)という.)

EをE_α $(\alpha \in A)$の積ベクトル空間とし，各集合H_αは‘座標軸’E_αへの射影p_αだけからなる場合(演習問題2.6参照)に，E上の射影的極限位相は積位相に一致することを示せ．

3.4. $\mathbf{N}^n$を正整数のn-系$p = (p_1, \dots, p_n)$(各p_jは整数$\geqslant 0$，$1 \leqslant j \leqslant n$)の全体とする．このとき次のベクトル空間はすべて‘自然に’同形であることを示せ．

(a) $\mathbf{N}^n$上で定義された複素数値関数全体の空間$\mathscr{F}(\mathbf{N}^n;\mathbf{C})$;

(b) 積空間

$$\mathbf{C}^{N^n} = \prod_{p \in N^n} \mathbf{C}_p \qquad (\text{ただし}\ \forall p,\ \mathbf{C}_p \cong \mathbf{C});$$

---

1) x, yが異なればE_xとE_yには共通元がないと考えて合併集合を作ったもの．たとえば$\tilde{E}_x = (E_x, x)$とおくと，$x \neq y$なら$\tilde{E}_x \cap \tilde{E}_y = \phi$となるから，合併$\bigcup_{x \in X} \tilde{E}_x$を$\mathbf{E}$とすればよい．各$E_x$を$\tilde{E}_x$と同一視すると，$E_x \subseteq \mathbf{E}$．これは通常**直和**と訳されるが，ベクトル空間の直和(23頁)と混同しないように**素和**とした．

(c)　n 個の添字をもつ複素数列 [n 重数列ともいう] $\sigma = (\sigma_p)$ $(p \in \mathbf{N}^n)$ の全体；

(d)　n 変数の形式的巾級数の空間 $\mathbf{C}[[X_1,\dots, X_n]]$.

これらの‘自然な’同形は，次に述べる位相に関して位相同形にもなることを示せ．(a) には $\mathbf{N}^n$ 上の各点収束の位相，(b) には積位相，(c) には各項 σ_p 毎の収束の位相，(d) には係数の単純収束の位相をそれぞれ入れる．このうち (a) と (d) の間の同形対応は $\mathscr{F}(\mathbf{N}^n;\mathbf{C})$ に普通の関数の積，(d) に形式的巾級数の積を考えたときの環の同形対応にはならないことを示せ．

3.5. 整数 $\geqslant 0$ 全体の集合 $\mathbf{N}$ 上で定義された複素数値関数のうち $\mathbf{N}$ の有限部分集合の外では 0 となるようなもの全体のなすベクトル空間を $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ と書く．いま，$\{\varepsilon_n\}$ $(n=0,1,2,\dots)$ は正数の列で $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} \to 0$ なるものとする $(\varepsilon_n > 0)$．このとき $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ の部分集合

$$\mathscr{U}(\{\varepsilon_n\}) = \{f\,;p \geqslant n \Longrightarrow |f(p)| \leqslant \varepsilon_n,\ \ n = 0,1,2,\dots\}$$

は，$\{\varepsilon_n\}$ があらゆる仕方で変わったとき，$\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ の線形構造と整合する一つの位相に関する 0 の基本近傍系である．このことを証明せよ．またこの位相について，0 の近傍フィルターは可算基底を持たないことを示せ．

3.6. 前問の記号をそのまま用いる．いま，$\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ の元 f で $\forall p > n$，$f(p) = 0$ なるもの全体のなる線形部分空間を $\mathscr{F}_c(n)$ と書く．このとき次のことを示せ．

(i)　$\mathscr{F}_c(n)$ は $n+1$ 次元のベクトル空間である．

(ii)　$\mathscr{F}_c(n)$ は TVS $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ の閉集合である (位相は前問に述べたもの)．

(iii)　$\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ から導入される $\mathscr{F}_c(n)$ の位相は，任意の同形対応 $\mathscr{F}_c(n) \cong \mathbf{C}^{n+1}$ を用いて入れた位相と一致する．

3.7. E をベクトル空間，U を E の部分集合であって平衡的，吸収的かつ凸とする (すなわち，$x, y \in U \Longrightarrow \forall t, 0 \leqslant t \leqslant 1,\ tx+(1-t)y \in U$)．このとき，集合 $(1/n)U$ $(n=1,2,\dots)$ は E の線形構造と整合する一つの位相に関して 0 の基本近傍系を成すことを証明せよ．

このことは U が凸という仮定なしにも常に正しいか？

4.

Hausdorff 位相ベクトル空間,
商位相ベクトル空間，連続線形写像

この章を通して，Eは複素数体$\boldsymbol{C}$上の TVS とする.

Hausdorff 位相ベクトル空間

位相空間Xが Hausdorff であるとは，Xの任意の相異なる二点x, yに対して，xの近傍Uとyの近傍Vが存在してそれらが交わらないこと，すなわち$U \cap V = \emptyset$となることをいう．Hausdorff 空間の非常に大事な性質は，いわゆる**極限の一意性** (uniqueness of limit) である.

"Hausdorff 空間上のフィルターはたかだか一点にしか収束しない."

実際X上のフィルター$\mathscr{F}$が相異なる二点xとyに収束したと仮定してみる．U, Vをそれぞれx, yの近傍で$U \cap V = \emptyset$なるものをとる．U, Vはともに$\mathscr{F}$に属するはずであるから，その共通部分は空ではあり得ない！これは矛盾である.[1)]

Hausdorff 空間では，唯一点からなる集合は閉じている（この性質をもつ位相空間であって Hausdorff でないものが存在するが，それは次に見るように，TVS ではあり得ない).Eを TVS としたとき，もし任意の相異なる二点x, yに対して，xの近傍Uでyを含まぬものが存在するならばEは Hausdorff である．すなわち次の結果が成り立つ.

---

1) 逆に，フィルターの極限が（そのフィルターが収束するとき）つねに一意的であれば，Xは Hausdorff である.

命題 4.1. E を TVS としたとき，E が Hausdorff であるための必要十分条件は，任意の $x \neq 0$ に対して 0 の近傍 U で $x \notin U$ なるものが存在することである．

必要性は明白．条件が十分であることを見よう．x, y を E の相異なる二点とする．$x-y \neq 0$．よって 0 の近傍 U で $x-y \notin U$ なるものがある．平衡的な 0 の近傍 V で $V+V \subseteq U$ となるものをとる (定理 3.1，25 頁)．V は平衡的だから $-V = V$，ゆえに $V-V \subseteq U$．もし共通部分

$$(V+x) \cap (V+y) \tag{4.1}$$

が空でなければ，z をその一点とすると，$x', y' \in V$ が存在して

$$z = x+x', \qquad z = y+y'$$

と書けるはずである．すると

$$x-y = y'-x' \in V-V \subseteq U$$

となって U の選び方に反する．すなわち (4.1) は空集合でなければならない．これは E が Hausdorff を示す．

命題 4.2. E を TVS とすると，E の 0 のあらゆる近傍の共通部分は一つの部分ベクトル空間であって集合 $\{0\}$ の閉包に一致する．

原点 0 のすべての近傍の共通部分を N とし，まず N が部分ベクトル空間であることを示そう．x, y を N の二点とし，α, β を共には 0 でない複素数とする．U を 0 の任意の近傍とし，V を 0 の平衡的近傍で $V+V \subseteq U$ とする．$x, y \in N$ だから

$$x, y \in (|\alpha|^2+|\beta|^2)^{-\frac{1}{2}}V;$$

したがって，$\alpha x+\beta y \in \alpha(|\alpha|^2+|\beta|^2)^{-\frac{1}{2}}V+\beta(|\alpha|^2+|\beta|^2)^{-\frac{1}{2}}V \subseteq V+V \subseteq U$．ここで U は任意だから $\alpha x+\beta y \in N$ を得る．

次に x を N の点とする．0 の任意の近傍 U は x を含むから，これを書き直せば

$$0 \in (-U)+x.$$

ところが $(-U)+x$ は x の任意の近傍を表わしうるから（-1 を掛ける写像は**同相写像** (homeomorphism) すなわち1対1で上への両連続写像である)，x の任意の近傍が 0 を含む，すなわち $x\in\overline{\{0\}}$ (9頁)．逆に，x の任意の近傍が 0 を含むとすれば，x の任意の近傍は $-U+x$ と書けるから $0\in -U+x$，すなわち $x\in U$，これは U が任意だから $x\in N$ (証終).

系. E を TVS とするとき，E が Hausdorff であるための必要十分条件は，集合 $\{0\}$ が閉集合なること，あるいは，原点の補集合が開集合なることである.

実際 $\{0\}$ が閉集合であるとは $N=\{0\}$ なること，あるいは，$x\neq 0$ なる任意の x がすべての近傍には含まれないことだからよろしい.

この系の重要な帰結として

命題 4.3. f, g を位相空間 X から Hausdorff TVS E への連続写像とする．このとき，f, g が一致する点の集合 A

$$A=\{x\in X\,;\ f(x)=g(x)\}$$

は X の閉集合である[1].

実際 A は閉集合 $\{0\}\subseteq E$ の連続写像 $x\mapsto f(x)-g(x)$ による逆像だから閉集合.

命題 4.4. X, E, f, g は前命題と同様とする．もし f と g が X の稠密な集合 Y の上で一致するならば X 全体で一致する.

実際 $f=g$ が成り立つのは閉集合 (前命題) でかつ Y を含むから，$\overline{Y}=X$ 上で成り立つ.

---

1) A が閉集合なることをいうのに，別に E が TVS である必要はない．単に E が Hausdorff 空間ならよい．実際そのとき，対角線集合 $\Delta=\{(x,x)\,;\,x\in E\}$ は $E\times E$ の閉集合で，連続写像 $x\mapsto(f(x), g(x))$ による Δ の逆像が A.

商位相ベクトル空間

M を E の部分ベクトル空間として，商ベクトル空間 E/M を考える (18頁). $\phi: E \to E/M$ を標準的写像すなわち各 $x \in E$ に M を法とする (mod M) 剰余類 $\phi(x)$ [第2章で説明した x の同値類] を対応させるものとする．ϕ は線形であった．(E は TVS だから) E には位相がある．この位相から標準的方法で E/M 上に位相を定義し，それを E/M 上の**商位相** (quotient topology) とよぶ．E/M の原点の近傍フィルターは次のように定める．すなわち，E の原点の近傍フィルターの ϕ による像を E/M の原点の近傍フィルターとする．これは次のように表現することができる．"E/M の部分集合 $\dot{U}$ が商位相に関して0の近傍であるとは，E の0の近傍 U が存在して $\dot{U} = \phi(U)$ となることとする"．すなわち，E/M の0の近傍の全体は E の0の近傍の ϕ による像の全体である．

ϕ は E の各点の近傍をその像である E/M の点の近傍にうつすことに注意しておこう．このことは連続写像一般では成り立たないことである：連続写像による近傍の逆像は常に近傍であるが，像については何もいえない．ところで，ϕ が連続であるかどうかはまだ述べていなかった．しかし，ϕ の連続性を見るのは容易である：実際 $\dot{U}$ を E/M の原点の近傍としてみると，E の原点の近傍 U が存在して $\phi(U) = \dot{U}$，したがって $U \subseteq \phi^{-1}(\dot{U})$ だから $\phi^{-1}(\dot{U})$ は E の0の近傍になる．

開集合についていえば，ϕ は開集合を開集合に写し，また開集合の ϕ による逆像は開集合である．

"しかし一般には，閉集合の ϕ による像は閉集合にはならない"．

よく知られた反例を次に述べておく．平面 $\mathbf{R}^2$ の双曲線 $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 ; x_1x_2 = 1\}$ を考える．$E = \mathbf{R}^2$ とし M として一つの座標軸をとる．すると E/M は残った方の座標軸と同一視できる．ϕ はその座標軸への**直交射影** (orthogonal projection) と同一視される．これらの同一視は位相も考慮に入れて正しい．

このとき，双曲線は $\mathbf{R}^2$ の閉集合であるが，その像は直線上の原点の補集合となり，それは開集合であって閉集合でない．

また，次のことを見るのも容易である (読者にまかせる): "E/M 上の商位相は，ϕ を連続にする位相のうちで最も細かいものである"．

E/M 上の商位相がその線形構造と整合していることは，定義からただちにわかる (25 頁)．

命題 4.5. E を TVS, M をその部分ベクトル空間とする．このとき次の二条件は同値である．

(a) M は閉集合；

(b) E/M は Hausdorff

命題 4.2 の系を用いて (b) をいい換えると，E/M の原点の補集合が開集合ということになる．これは丁度 E における M の補集合の ϕ による像だから，ϕ が開集合を開集合に写す連続写像であることを考慮すれば，(a) と (b) は同値になる．

系. TVS $E/\overline{\{0\}}$ は Hausdorff である．

TVS $E/\overline{\{0\}}$ のことを TVS E に**付随する Hausdorff 位相ベクトル空間** (Hausdorff topological vector space associated with E) という．E が Hausdorff なら $\overline{\{0\}} = \{0\}$ だから $E/\overline{\{0\}} = E$ であり，標準的写像 $\phi: E \to E/\overline{\{0\}}$ は 1 対 1 で上への写像になる．

連続線形写像

E, F を二つの TVS とし，f を E から F への線形写像とする．F を Hausdorff，f を連続と仮定すれば，f の核 (19 頁) は閉集合になる．実際

$\mathrm{Ker}\,f$ は集合 $\{0\} \subseteq F$ の逆像であり，Fが Hausdorff なら $\{0\}$ は閉集合だからである．もちろん Fが Hausdorff でなくても $\mathrm{Ker}\,f$ は閉集合になり得る (例 1. $f=0$；例 2. fが1対1で Eが Hausdorff，このとき $\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$ は E で閉).

次の図式を考える (19 頁).

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\ f\ } & \mathrm{Im}\,f & \xrightarrow{\ i\ } & F \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \bar{f}} & & & \\ E/\mathrm{Ker}\,f & & & & \end{array}$$

ここで，i では自然な単射，ϕ は標準写像，$\bar{f}$ はこの図式の可換性から一意的に定まる写像とする．

命題 4.6. 写像 fが連続であるためには $\bar{f}$が連続であることが必要十分である．

fを連続と仮定し，Ωを F または $\mathrm{Im}\,f$ の開集合とする ($\mathrm{Im}\,f$ の開集合は，Fの開集合と $\mathrm{Im}\,f$ の交わりである)．Ωの $\bar{f}$による逆像は，Ωの fによる逆像の ϕによる像に等しい．仮定によって $f^{-1}(\Omega)$ は開集合であり，ϕは開集合を開集合にうつすから，Ω の $\bar{f}$による逆像は開集合になる．逆に $\bar{f}$が連続なら，ϕは常に連続だから $f=\bar{f}\circ\phi$ も連続 (証終).

一般的には，$\bar{f}$ は1対1だから $\bar{f}$の逆写像が $\mathrm{Im}\,f$ 上で定義されるが，これは連続とは限らない．

定義 4.1. $\bar{f}$が連続で，$\mathrm{Im}\,f$ 上で定義された $\bar{f}$の逆写像も連続 ($\mathrm{Im}\,f$ の位相は Fの位相から導かれたもの：**誘導位相** (induced topology)) のとき，fを [TVS 構造の] **準同形** (homomorphism) という．さらに fが1対1のとき，fを Eから Fへの (または $\mathrm{Im}\,f$ の上への) [TVS 構造の] **同型写像** (isomorphism) という．

一つの TVS E からもう一つの TVS F への連続線形写像の全体を $L(E\,;F)$

で表わす．もちろんこれは，すべての線形写像の空間 $\mathscr{L}(E;F)$ の部分集合である．$L(E;F)$ が $\mathscr{L}(E;F)$ の部分ベクトル空間になるのは明らか．すなわち，自然な加法をスカラー乗法によって，ベクトル空間になっている．$F=\mathbf{C}$ の場合には，通常 $L(E,F)$ の代りに E' と書き，E の **双対** (dual) [または**双対空間** (dual space)] とよぶ．E' と代数的双対 E^* との区別を強調するときには，しばしば**位相的双対** (topological dual) ともいわれる (21 頁)．もちろん E' は E^* の部分ベクトル空間であり，E' は**連続線形汎関数** (continuous linear functional) あるいは**連続線形形式**（または**連続一次形式** continuous linear form) のベクトル空間である．E' の元は普通 x', y' などと書く．ベクトル空間 E' や $L(E,F)$ はこれからの議論で重要な役割をする．また，種々の位相を入れて考察される．

最後に TVS の位相の '均質性' (homogeneity) を示すよく知られた線形写像の性質を述べよう．

命題 4.7. E, F を二つの TVS, u を E から F への線形写像とする．u が連続になるには，u が原点で連続になることが必要十分である．

実際 F における $u(x)$ $(x\in E)$ の任意の近傍は $V+u(x)$ なる形 (V は F の 0 の近傍) をしている．u は線形だから

$$u^{-1}(V+u(x))\supseteq u^{-1}(V)+x.$$

もし u が原点で連続なら $u^{-1}(V)$ は E において 0 の近傍になるから，u は上の関係式から E 上いたるところ連続．

演　習　問　題

4.1. 演習問題 3.1 で定義された位相ベクトル空間 $\Gamma(X;\mathbf{E})$ が Hausdorff になるのは，すべての x について E_x が Hausdorff になるときそのときに限る．

4.2. TVS の族 $E_\alpha (\alpha\in A)$ の積が Hausdorff になるのは，すべての E_α が Hausdorff であるときそのときに限る．

4.3. Mを TVS Eの部分ベクトル空間とする. Eのもう一つの部分ベクトルNがMのEにおける**代数的補空間** (algebraic supplementary) であるとは, 写像$(x, y) \mapsto x+y$ $M \times N$からEの上へのベクトル空間としての同形写像になっていることをいう. NがMの**位相的補空間** (topological supplementary) であるとは, 写像$(x, y) \mapsto x+y$が$M \times N$ からEの上への TVS 構造の同形写像になっていることをいう. またこのとき, EはMとNの**位相的直和** (topological direct sum) であるといわれる.

次の二つの条件は同値であることを証明せよ.

(a) NはMの位相的補空間である.

(b) EからE/Mの上への標準写像のNへの制限はNからE/Mの上への TVS の同形写像である.

もし, EからMの上への一つの連続線形写像pがあって, $p \circ p = p$なる条件をみたすならば, Mは少なくとも一つ位相的補空間を持つ. ($p(x) = x$ は $x \in M$と同値であることに注意).

4.4. E, Fを二つの TVS, $f : E \to F$を連続線形写像とする. 次の二条件の同値なことを示せ.

(a) $\mathrm{Ker}\, f$ はEで位相的補空間を持つ (前問参照)

(b) FからEへの連続線形写像gが存在して, $f \circ g = F$上の恒等写像となる.

4.5. Eを TVS, Mをその部分ベクトル空間とする. 任意の TVS Gをとり, 連続線形写像 $f : E \to G$ にそのMへの制限を対応させると, それは$L(E; G)$から$L(M; G)$への線形写像となる. この写像が任意のGに対して全射になるには, Mが位相的補空間を持つことが必要十分である.

5.

Cauchy フィルター，完備な集合，完備化

TVS E における **Cauchy 列** (Cauchy sequence) の定義は全く簡単である．$S=\{x_1, x_2, \ldots\}$ を列とする．S が Cauchy 列であるとは，E の原点の任意の近傍 U に対して整数 $n(U)$ が存在して

(5.1) $$n, m \geqslant n(U) \text{ ならば } x_m - x_n \in U$$

となることをいう．この定義は，TVS E が複素平面のときには普通の定義と一致する (この場合には U として，原点中心の半径 $\varepsilon>0$ の円板をとれば十分である)．いつものように，部分列

$$S_n = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$$

を考えれば，(5.1) は

$$S_{n(U)} - S_{n(U)} \subseteq U$$

を意味する．$\{S_n\}$ は点列 S に付随するフィルターの基底であることを考慮すれば，Cauchy フィルターの定義に導かれる．

定義 5.1. TVS E の部分集合 A 上のフィルター $\mathscr{F}$ が **Cauchy フィルター**であるとは，E の 0 の任意の近傍 U に対して，$\mathscr{F}$ に属する A の部分集合 M が存在して

$$M - M \subseteq U$$

となることをいう．

この定義の説明のために，距離空間の場合を考えてみよう．$E \times E$ 上で定義

された距離関数 $d(x,y)$ が E の位相を定めているとする.[1]　U としては，ある $\varepsilon>0$ に対して $x-y\in U$ が丁度 $d(x,y)<\varepsilon$ になるものをとる．さて，E の任意の部分集合 M の**直径** (diameter) を，x, y が M を動くときの $d(x,y)$ の上限 (supremum) として定義する．こうすれば，$M-M\subseteq U$ は丁度 M の直径が $\leqslant\varepsilon$ となることを意味する．したがって定義 5.1 は，E が**距離 TVS** (metric TVS) の場合には，次のようになる．$A(\subseteq E)$ 上のフィルター $\mathscr{F}$ が Cauchy フィルターになるのは，それがいくらでも小さな直径の部分集合を含むときである．

さて，一般の場合にもどって，次のことは明らか．

命題 5.1. Cauchy 列に付随するフィルターは Cauchy フィルターである．

また次の事実も明らかであろう．

命題 5.2. (a)　一点 $x\in E$ の近傍フィルターは Cauchy フィルターである．

(b)　一つの Cauchy フィルターよりも細かいフィルターは Cauchy フィルターである．

(c)　収束フィルターはすべて Cauchy フィルターである．

(a) は次のようにしてわかる．U を 0 の任意の近傍とすれば，別の 0 の近傍 V が存在して $V-V\subseteq U$. したがって

$$(V+x)-(V+x)\subseteq U$$

(b) は明白．(c) は (a) と (b) から出る，なぜなら，一点に収束するフィルターはその点の近傍フィルターよりも細かいからである．

(c) の逆が成り立たないことはよく知られている．すなわち，Cauchy フィルターは収束するとは限らない．

---

1)　もちろん，この位相が TVS の位相であるとし，距離が平行移動で不変，すなわち $d(x-y,0)=d(x,y)$ となるとして考える．

定義 5.2. E の部分集合 A が**完備** (complete) であるとは，A 上の任意の Cauchy フィルターが A の点に収束するときにいう．

空間 E 自身が完備かどうかという問題ももちろん有意味である．部分集合 A 上の任意の Cauchy 列が A の点に収束するとき，A を**列完備** (sequentially complete) とよぶ．完備なら常に列完備であるが，その逆に一般には正しくない．しかし後に出てくる TVS の重要なクラスいわゆる**距離付け可能な空間** (metrizable spaces) においては，この逆が成立する．

次の二つ命題の証明は読者の演習としよう．

命題 5.3. Hausdorff TVS において完備な集合は閉集合である．

命題 5.4. 完備な TVS E の閉集合は完備である．

さて，任意の Hausdorff TVS E に対して —— 標準的な方法で —— 完備な (Hausdorff) TVS $\widehat{E}$ を構成する方法を述べよう．$\widehat{E}$ を E の**完備化** (completion) という．

その準備のために，**一様連続** (uniformly continuous) な関数の幾つかの性質を述べておこう．E, F を二つの TVS, A を E の部分集合とする．定義を述べよう．

定義 5.3. 写像 $f: A \to F$ が一様連続であるとは，F における 0 の任意の近傍 V に対して E における 0 の近傍 U が存在して，A の二点 x_1, x_2 に対し

$$x_1 - x_2 \in U \text{ ならば } f(x_1) - f(x_2) \in V$$

となることをいう．

読者はこの定義を $E = F = \mathbf{R}$ (また $\mathbf{C}$) の場合の普通の定義と比較してみるとよい．一様連続な関数は各点で連続である；逆は成り立たない．次の二つの命題の証明はやさしい．読者にまかせる．

命題 5.5. TVS E の部分ベクトル空間 A から TVS F への連続線形写像は一様連続である.

命題 5.6. f を $A \subseteq E$ から F への一様連続写像とする. A 上の Cauchy フィルターの f による像は F 上の Cauchy フィルターになる.

これらの事実から (すぐ後に示すように) 一様連続写像の延長に関する主結果が出る.

定理 5.1. E, F を TVS, A を E の稠密な集合, f を A から F への一様連続な写像とする. このとき, もし F が完備であるとすれば, E から F への連続写像 $\bar{f}$ であって f の延長となるもの, すなわち, すべての $x \in A$ に対して

$$\bar{f}(x) = f(x)$$

となるものが一意的に存在する.

さらに $\bar{f}$ は一様連続であり ; A が部分ベクトル空間であって, f が線形のときには, $\bar{f}$ も線形になる.

証 明 すでに述べたように, 本質的には命題 5.6 による. 延長 $\bar{f}$ の一意性は命題 4.4 からただちに出る. そこで存在の証明しよう.

x を E の任意の点とし $\mathscr{F}(x)$ をその近傍フィルターとする. A は稠密だから, x の任意の近傍は必ず A と交わる. したがって $V \cap A$, $V \in \mathscr{F}$ なる集合はすべて空でないから A 上のフィルター基底を成す. この基底によって生成される A 上のフィルターのことを $\mathscr{F}(x)$ の **A への制限** (trace on A) という. これを $\mathscr{F}(x) \cap A$ で表わそう. これは明らかに Cauchy フィルターである. したがって命題 5.6 により, その像は F 上の Cauchy フィルターになる. F は完備で Hausdorff だから, この Cauchy フィルターは F で一意的な極限をもつ. この極限を $\bar{f}(x)$ と書く. $x \in A$ のときには $\mathscr{F}(x) \cap A$ は A における x の近傍フィルター [E の位相を A に制限したものに関する] であり, f の連続性から $\bar{f}(x) = f(x)$ となる.

さて $\bar{f}$ の連続性を証明しよう．x を E の点とし，V を $\bar{f}(x)$ の閉近傍とする．$\bar{f}(x)$ の定義により，V は $\mathscr{F}(x) \cap A$ の像に属する．すなわち，x の近傍 U が存在して

$$U \cap A \subseteq \bar{f}^{-1}(V)$$

となる．そこで y を $U \cap A$ の閉包に属する点としてみよう．これは U' が $\mathscr{F}(y)$ を動くとき $U' \cap U \cap A$ が決して空にならないことを意味する．したがってこれらの集合は A 上の一つのフィルターの基底を成すが，このフィルターは $\mathscr{F}(y) \cap A$ より細かいから，明らかに Cauchy フィルターである．ゆえに，その像フィルター $\mathscr{G}$ は F で $\bar{f}(y)$ に収束する．このことから，$\bar{f}(y)$ の任意の近傍は $f(U' \cap U \cap A)$ の形の集合を含み，したがって $f(U \cap A) \subseteq V$ に属する点を含む．ところが V は閉集合だから $\bar{f}(y)$ は V に属する．このようにして

$$\overline{U \cap A} \subseteq \bar{f}^{-1}(V)$$

を得る．さて，ここで U を開集合にとってみよう．そして $y \in \bar{U}$ としてみよう．y の近傍はすべて U と交わる．y の開近傍を一つ選んで U' とする．$U \cap U'$ は開集合であり A は稠密だから，$U \cap U'$ は A と交わる，すなわち U' は $U \cap A$ と交わる．これは $y \in \overline{U \cap A}$ を意味する．かくして

$$\bar{U} = \overline{U \cap A} \subseteq \bar{f}^{-1}(V)$$

が証明された．これは，$\bar{f}$ による V の逆像が x の近傍であることを示しており，$\bar{f}$ の連続性を意味する．

$\bar{f}$ の一様連続性は，演習問題として読者にまかせる．

さて，f を線形として，次の二つの写像を考える．

$$(x, y) \mapsto \bar{f}(x+y), \quad (x, y) \mapsto \bar{f}(x)+\bar{f}(y).$$

加法の連続性と $\bar{f}$ の連続性から，これらは $E \times E$ から F への連続写像である．これらは $E \times E$ の稠密な集合 $A \times A$ の上で一致するから，命題 4.4 により到るところ一致する．これは

$$\bar{f}(x+y) = \bar{f}(x)+\bar{f}(y)$$

を示す．同様の論法によって $\bar{f}(\lambda x) = \lambda \bar{f}(x)$ がすべての $x \in E$，$\lambda \in \mathbf{C}$ に対し

て成立する．(証終)

さて，位相ベクトル空間の完備化の定理とその証明に進もう．

定理 5.2. E を TVS とする．もし E が Hausdorff であれば，完備な Hausdorff TVS $\widehat{E}$ と E から $\widehat{E}$ への写像 i であって次の諸性質をもつものが存在する．

(a) 写像 i は E から $\widehat{E}$ [の中] への (TVS 構造に関する) 同形写像．

(b) i による E の像は $\widehat{E}$ で稠密．

(c) 任意の完備 Hausdorff TVS F と任意の連続線形写像 $f: E\to F$ に対して，連続線形写像 $\hat{f}: \widehat{E}\to F$ が存在して，次の図式が可換になる．

(5.2)
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\hat{f}} & \\ \widehat{E} & & \end{array}$$

さらに，次のことが成り立つ：

(I) 任意の他の完備 Hausdorff TVS $\widehat{E}_1$ と写像 $i_1: E\to\widehat{E}_1$ の対 $(\widehat{E}_1, i_1)$ が (a), (b) を [$\widehat{E}$ の代わりに $\widehat{E}_1$, i の代りに i_1 として] 満足したとすれば，$(\widehat{E}_1, i_1)$ は (E, i) に次の意味で同形である．すなわち，$\widehat{E}$ から $\widehat{E}_1$ の上への [TVS 構造の] 同形写像 j が存在して，次の図式が可換になる．

(5.3)
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_1} & \widehat{E}_1 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{j} & \\ \widehat{E} & & \end{array}$$

(II) 性質 (c) において，F と f があたえられれば $\hat{f}$ は一意的に定まる．

定理 5.2 の証明

$\widehat{E}$ の存在は，これを構成して見せることにより証明する．まず $\widehat{E}$ になるべ

き集合を構成し，次にこの集合上にベクトル加法とスカラー乗法を定義する．このようにして $\widehat{E}$ をベクトル空間にしてから後 $\widehat{E}$ 上に位相を定義する（この位相は線形構造と整合するようにする）．このようにして TVS $\widehat{E}$ を得る．$\widehat{E}$ が Hausdorff であることを証明する．それから E から $\widehat{E}$ の中への同型写像 i を構成する（この写像を E から $\widehat{E}$ への**自然な単射** (natural injection) とよぶ)．これはまず写像として定義し，それが線形であることを示す（これはほとんど自明)，次にそれが位相写像すなわち 1 対 1 で両連続であることを示す．それから Imi が $\widehat{E}$ で稠密であることを示し，最後に性質 (c) を証明する．このような仕方で存在証明の部分を終える．残りは，（同形を除いての）一意性である，すなわち性質 (I), (II) の証明である．

(1) 集　合　$\widehat{E}$

集合 E は E 上の Cauchy フィルター全体の成す集合の次に述べる同値関係 R を法 (modulo R) とする商空間である．

(R)　$\mathscr{F} \underset{R}{\sim} \mathscr{G}$ $[\mathscr{F} \bmod R = \mathscr{G} \bmod R]$ とは，E の 0 の任意の近傍 U に対して $A \in \mathscr{F}$，$B \in \mathscr{G}$ が存在して $A-B \subseteq U$ となることをいう．

E の位相が距離 d によって定義されている場合には[1]，U として $x-y \in U$ が丁度 $d(x, y) < \varepsilon$ となるような 0 の近傍をとれば，$A-B \subseteq U$ という関係は A が B の **ε 位の開近傍** (open neighborhood of order ε) に含まれ，B が A の ε 位の開近傍に含まれることを意味する（ここで一般に，集合 S の ε 位の開近傍とは，点 $x \in E$ で

$$\inf_{y \in S} d(x, y) < \varepsilon$$

となるようなもの全体の成す集合のこと）．

この関係 R が実際に同値関係になるかどうかは，検証する必要がある．$\mathscr{F}$ を Cauchy フィルターとすれば，0 の任意の近傍 U に対して $A \in \mathscr{F}$ があって $A-A \in \mathscr{F}$ となる（R の反射性)．R の対称性は次のことから出る：$A-B \subseteq U$

1) 87 頁脚注参照.

ならば $B-A \subseteq -U$ となるが，$-U$ は U と同様に 0 の任意の近傍になり得る．R の推移性は次のようにする：V を 0 の近傍で $V+V \subseteq U$ なるものとして，$\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ を三つの Cauchy フィルターで

$$\mathscr{F} \underset{R}{\sim} \mathscr{G}, \quad \mathscr{G} \underset{R}{\sim} \mathscr{H}$$

とすると，$A \in \mathscr{F}$，$B, B' \in \mathscr{G}$，$C \in \mathscr{H}$ が存在して

$$A-B \subseteq V, \quad B'-C \subseteq V$$

となるが，これからただちに

$$A-B \cap B' \subseteq V, \quad B \cap B'-C \subseteq V$$

を得て，さらに加え合せると

$$\begin{aligned} A-C &\subseteq (A-B \cap B')+(B \cap B'-C) \\ &\subseteq V+V \subseteq U. \end{aligned}$$

このようにして R が同値関係であることが証明された．$\widehat{E}$ は $\bmod R$ の同値類の成す集合である．

(2) $\widehat{E}$ におけるベクトル加法とスカラー乗法

$\widehat{E}$ の元を $\hat{x}, \hat{y}$ のように書く．$\widehat{E}$ の各元 $\hat{x}$ は Cauchy フィルターの同値類だから，その同値類の元あるいは**代表元** (representative) というものが考えられる．

λ をスカラー $(\neq 0)$ としたとき，$\lambda\hat{x} \in \widehat{E}$ を，$\hat{x}$ の任意の代表元 $\mathscr{F}$ を用いて，

$$\lambda\mathscr{F} = \{\lambda A\,;\, A \in \mathscr{F}\}$$

なるフィルターの $\bmod R$ の同値類として定義する．この定義が代表元 $\mathscr{F}$ の選び方に依らないことを見るのはやさしい．実際，$\mathscr{F}'$ を $\hat{x}$ の他の代表元とし，U を 0 の任意の近傍とすれば，$A \in \mathscr{F}$，$A' \in \mathscr{F}'$ が存在して

$$A-A' \subseteq \lambda^{-1}U\,;\ \text{ゆえに}\ \lambda A-\lambda A' \subseteq U$$

となる．これは $\lambda\mathscr{F}$, $\lambda\mathscr{F}'$ が $\bmod R$ で等しいことを示す．

$\lambda=0$ のときには，$\lambda\hat{x}=\hat{0}$ とする．ここで $\hat{0}$ は原点の近傍フィルターの $\bmod R$ の同値類（または，同じことだが，0 を含むあらゆる部分集合から成る

Cauchy フィルターの mod R の同値類) とする．

$\hat{x}, \hat{y}$ を $\hat{E}$ の任意の二元とし，$\mathscr{F}, \mathscr{G}$ をそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}$ の代表元とする．$\mathscr{F}+\mathscr{G}$ によって，基底

$$(\mathscr{F}+\mathscr{G})_0 = \{A+B\,;\ A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{G}\}$$

で生成されるフィルターを表わす．$(\mathscr{F}+\mathscr{G})_0$ が実際にフィルター基底になることを見るのはやさしい．事実どの元も空集合ではなく，任意の $A, A' \in \mathscr{F}$, $B, B' \in \mathscr{G}$ に対して

$$(A \cap A')+(B \cap B') \subseteq (A+B) \cap (A'+B')$$

だから，公理 (BF) (8 頁) を満足する．また，

$$\mathscr{F} \underset{R}{\sim} \mathscr{F}', \quad \mathscr{G} \underset{R}{\sim} \mathscr{G}'$$

ならば

$$(\mathscr{F}+\mathscr{G}) \underset{R}{\sim} (\mathscr{F}'+\mathscr{G}')$$

となることを見るのもやさしい．実際 U, V を 0 の近傍で $V+V \subseteq U$ とすると，$A \in \mathscr{F}$, $A' \in \mathscr{F}'$, $B \in \mathscr{G}$, $B' \in \mathscr{G}$ が存在して

$$A-A' \subseteq V, \quad B-B' \subseteq V$$

となる．したがって

$$(A+B)-(A'+B') \subseteq V+V \subseteq U$$

となる．

このようにして，和 $\hat{x}+\hat{y}$ は $\mathscr{F}+\mathscr{G}$ の mod R の同値類として定義できる．

(3) $\hat{E}$ の位相

U を $0 \in E$ の任意の近傍として

(5.4) $$\hat{U} = \{\hat{x} \in \hat{E}\,;\ \hat{x} \text{ のある代表元が } U \text{ を含む}\}$$

と置く．V を $0 \in E$ のもう一つの近傍とするとき，

$$\widehat{U \cap V} \subseteq \hat{U} \cap \hat{V}$$

の成り立つことは明らか．

これは，U がEの 0 の近傍フィルターを動いたとき，$\hat{U}$ の形の集合が $\hat{E}$ 上の

一つのフィルター基底を成すことを示す. これを $\widehat{\mathscr{F}}$ としよう. このとき, 定理 3.1 の条件 (3.1) — (3.5) が E, $\mathscr{F}$ を $\widehat{E}$, $\widehat{\mathscr{F}}$ で置き換えて満足されることの検証は読者にまかせる. [$\hat{0}$ を $\widehat{E}$ の 0 とする.]

(4) $\widehat{E}$ が Hausdorff であること

$\hat{x}$ を $\widehat{E}$ の元で $\neq 0$ とする. これは, $\hat{x}$ の任意の代表元を $\mathscr{F}$, $\hat{0}$ の任意の代表元を $\mathscr{F}_0$ としたとき, これらの Cauchy フィルターが mod R で同値でないことを意味する. $\mathscr{F}_0$ としては, E の 0 を含む任意の部分集合全体からなるフィルターとしてよい. すると, $\mathscr{F}$ が mod R で $\mathscr{F}_0$ に同値でないとは, E の 0 の近傍 U が存在して, どのように $A \in \mathscr{F}$, $A_0 \in \mathscr{F}_0$ を選んでも $A - A_0 \not\subseteq U$ となることを意味する. 特に, $\{0\} \in \mathscr{F}_0$ だから, すべての $A \in \mathscr{F}$ に対して $A \not\subseteq U$. これは $U \notin \mathscr{F}$ を示す. そこで, V を E の 0 の近傍で $V+V \subseteq U$ なるものとし, $\mathscr{F}'$ を mod R で $\mathscr{F}$ に同値な任意の Cauchy フィルター [したがって $\hat{x}$ の別の代表元] としたとき, $V \notin \mathscr{F}'$ を示そう. いま $V \in \mathscr{F}'$ と仮定して見る. $A \in \mathscr{F}$, $A' \in \mathscr{F}'$ を $A - A' \in V$ なるようにとる. すると $A' \cap V \in \mathscr{F}'$, とくに $A' \cap V \neq \emptyset$ を得る. そして

$$A-(A' \cap V) \subseteq V$$

したがって

$$A \subseteq V+(A' \cap V) \subseteq V+V \subseteq U.$$

これは $U \notin \mathscr{F}$ に矛盾する. このようにして, 0 の近傍 V は $\hat{x}$ のどの代表元にも属さない. これは定義 (5.4) により, $\hat{x} \notin V$ を意味する. すなわち $\widehat{E}$ は Hausdorff.

(5) E から $\widehat{E}$ への自然な単射の存在

$x \in E$ の像 ($\widehat{E}$ の元) を, x の近傍フィルターの mod R の同値類として定義し, $i(x)$ で示すことにする. 次のことに注意しよう.

補題 5.1. (a) E 上の二つのフィルターが同一点に収束すれば, それらの

フィルターは mod R で同値である．

(b) フィルター $\mathscr{F}$ が mod R で x に収束する一つのフィルターに同値であれば，$\mathscr{F}$ は x に収束する．

証明は容易であり，読者にまかせる．補題 5.1 の意味するところは，x の近傍フィルターの mod R の同値類が，丁度その点 x に収束するフィルターの全体から成ることである．

写像 $x \mapsto i(x)$ が線形であることも容易に検証できる．

(6) 写像 i は 1 対 1，両連続であり，その像は稠密

$i(x) = i(y)$ として見る．これは，x の近傍フィルターと y の近傍フィルターが mod R で同値ということである．したがって，補題 5.1 により，これらのフィルターは共に二点 x, y に同時に収束することになる．Hausdorff 空間における極限の一意性 (37 頁) により，これは $x = y$ である以外は不可能である．次に，i が位相写像 (すなわち，i は連続でかつ $i^{-1} : i(E) \to E$ も連続) を示そう．これは，i が E の 0 の近傍を $i(E)$ の $\hat{E}$ から導かれた位相に関する 0 の近傍に写し，また $i(E)$ の 0 の近傍の逆像は E の 0 の近傍であることを意味する．したがって，まず示すべきことは，U が E の 0 の近傍であれば $i(U)$ は $\hat{U}_1 \cap i(E)$ の形の集合を含むことである．ここで U_1 はまた E の 0 の適当な近傍であって，

$$\hat{U}_1 = \{\hat{x} \in \hat{E}\,;\ \hat{x} \text{ のある代表元が } U_1 \text{ を含む}\}$$

である．実際，$\hat{U}_1 \cap i(E)$ の形の集合全体は $\hat{E}$ から導かれた $i(E)$ 上の位相に関する 0 の基本近傍系であり，包含関係

$$(5.5) \qquad i(U) \supseteq \hat{U}_1 \cap i(E)$$

は $i(U)$ がこの**誘導位相** (induced topology) に関する 0 の近傍であることを示す．逆に，E の 0 の近傍 U_1 があたえられたとき，もう一つ 0 の近傍 U が存在して

$$(5.6) \qquad i(U) \subseteq \hat{U}_1 \cap i(E)$$

となることを示さねばならない．これは $\hat{E}$ による $i(E)$ 上の誘導位相が，1 対 1

写像 i によって E の位相をそのまた $i(E)$ に移した位相よりも粗いことを示す. 換言すれば, (5.6) は $i: E \to i(E) \subseteq \widehat{E}$ の連続性を示し, (5.5) は $i^{-1}: i(E) \to E$ の連続性を示す.

さて, これらの事実を証明するために, 次のことを証明しよう. E の 0 のすべての近傍 U について,

$$i(\mathring{U}) \subseteq \widehat{U} \cap i(E) \subseteq i(\bar{U}) \tag{5.7}$$

が成り立つ. ここで $\mathring{U}$ は U **の内部** (interior of U) である. $\mathring{U}$ はもちろん 0 の近傍であるが, 同時に任意の $x \in \mathring{U}$ に対して x の近傍である. これは U が $i(x)$ の一つの代表元に属することを示す. すなわち $i(x) \in \widehat{U}$, $(x \in \mathring{U})$. 今度は $i(x) \in \widehat{U}$ と仮定すると, これは, $i(x)$ のある代表元が U を含むこと, すなわち x に収束するようなあるフィルターに U が属することを意味する. そこで, V を 0 の任意の近傍とすると, $V+x$ は x に収束するすべてのフィルターに属するから, $U \cap (V+x) \neq \emptyset$. これは $x \in \bar{U}$ を示している. [これで (5.7) が証明された.]

(5.7) から (5.6) が出る. なぜなら $\mathring{U}$ は 0 の近傍だから. 同様に, (5.7) から (5.5) も出る. 実際 TVS E において, 原点の閉近傍の全体が基本近傍系となるからである (命題 3.1).

これで i が位相写像なること, したがって TVS 構造の同形写像であることの証明ができた. 次に i の像 $i(E)$ が $\widehat{E}$ で稠密なことを証明しよう.

$\hat{x}_0$ を $\widehat{E}$ の任意の点とする; 証明すべきことは, $\hat{x}_0$ の任意の近傍がある点 $i(x)$, $x \in E$ を含むことである. 近傍としては (5.4) の $\widehat{U}$ を用いて $\widehat{U}+\hat{x}_0$ の形のものを考えれば十分である. 関係式 $i(x)-\hat{x}_0 \in \widehat{U}$ は, U が $i(x)-\hat{x}_0$ の適当な代表元に含まれること, すなわち x に収束する一つのフィルター $\mathscr{F}$ と $\hat{x}_0$ を代表する一つのフィルター $\mathscr{F}_0$ が存在して, $A \in \mathscr{F}$, $A_0 \in \mathscr{F}$ を適当にとれば

$$A-A_0 \subseteq U$$

となることを意味する.

さて, そのような点 x が存在することを証明しよう. V を E における 0 の近傍で $V+V \subseteq U$ なるものとする. $\mathscr{F}_0$ を $\hat{x}_0$ の任意の代表元, $A_0 \in \mathscr{F}_0$ を

$$A_0-A_0 \subseteq V$$

なるように選ぶ．[$\mathscr{F}_0$ は Cauchy フィルターであったから，このような A_0 が存在する.] 点 x としては，集合 A_0 の任意の点をとる．すると

$$(V+x)-A_0 \subseteq V+(A_0-A_0) \subseteq V+V \subseteq U.$$

ところで，$V+x$ は x に収束する任意のフィルター $\mathscr{F}$ に属しているから，これで証明できた．

(7) $\hat{E}$ が完備なこと

$\mathscr{F}$ を $\hat{E}$ 上の Cauchy フィルターとする．そうして $\hat{E}$ の部分集合族

$$\hat{M}+\hat{U},\ \hat{M} \in \mathscr{F},\ \hat{U}: \hat{E} \text{ の } 0 \text{ の近傍}$$

を考察する．これらは一つのフィルター基底を成す．実際，どの集合も空ではなく，また

$$(\hat{M}+\hat{U}) \cap (\hat{M}'+\hat{U}') \supseteq \hat{M} \cap \hat{M}'+\hat{U} \cap \hat{U}'$$

であるからよい．(この基底によって生成されるフィルター $\hat{\mathscr{F}}'$ は $\hat{\mathscr{F}}$ よりも粗い．なぜなら，基底のどの元も $\hat{\mathscr{F}}$ に属するから.) フィルター $\mathscr{F}'$ は Cauchy フィルターである．実際，$\hat{U}$ を $\hat{E}$ の 0 の任意の近傍とせよ．それに対して，もう一つ 0 の近傍 $\hat{V}$ を

$$\hat{V}+\hat{V}-\hat{V} \subseteq \hat{U}$$

となるようにとり (たとえば $\hat{V}$ を平衡的で $\hat{V}+\hat{V}+\hat{V} \subseteq \hat{U}$ なるようにすればよい)，$\hat{M} \in \hat{\mathscr{F}}$ を $\hat{M}-\hat{M} \subseteq \hat{V}$ なるようにとる．すると，$(\hat{M}+\hat{V})-(\hat{M}+\hat{V}) \subseteq \hat{V}+\hat{V}-\hat{V} \subseteq \hat{U}$.

さて，$\mathscr{F}'$ を $i(E)$ の部分集合で $\hat{A} \cap i(E)$, $\hat{A} \in \hat{\mathscr{F}}'$ の形のもの全体としよう．この各集合は

$$(\hat{M}+\hat{U}) \cap i(E), \qquad \hat{M} \in \hat{\mathscr{F}},\ \hat{U}: \hat{E} \text{ の } 0 \text{ の近傍}$$

の形の集合を含む．$\hat{M}$ は空でないから，これは

$$(\hat{y}+\hat{U}) \cap i(E), \qquad \hat{y} \in \hat{E}$$

の形のものを含む．$i(E)$ は $\hat{E}$ で稠密だから，これらは空集合にはなり得ない．このようにして進めば，$\mathscr{F}'$ が $i(E)$ 上の一つのフィルターであり，実際 Cauchy

フィルターであることは明らかである．i が E から $i(E)$ の上への [TVS の] 同型写像であることを用いれば，$i^{-1}(\mathscr{F}')$ は E 上の Cauchy フィルターになる．その $\operatorname{mod} R$ の同値類 $\hat{x}$ が $\widehat{\mathscr{F}}$ の極限になる．この最後の論点は，演習として読者にまかせる．

(8)　**性質 (c) の証明**

それには，定理 5.1 において E の代りに $\widehat{E}$, A の代りに E として見ればよい．これから性質 (II) に述べた $\bar{f}$ の一意性も得る．

(9)　**$\widehat{E}$ の（同形を除いての）一意性**

定理 5.2 の性質 (I) を証明する．性質 (c) で用いた記号によれば，図式 (5.3) において j は $\hat{i}_1$ と書ける．また $i_1(E)$ から $\widehat{E}$ への写像

$$i_1(x) \mapsto i(x)$$

を f と書いて，定理 5.1 を，A の代りに $i_1(E)$, E の代りに E, F の代りに $\widehat{E}$ として，適用すれば，f は一意的な延長 $\bar{f}: \widehat{E}_1 \to \widehat{E}$ を持つ．これらの写像の連続性と，$i(E) \subseteq \widehat{E}$, $i_1(E) \subseteq \widehat{E}_1$ の稠密性を用いれば，容易に次の関係を得る．

$$\bar{f}(j(\hat{x})) = \hat{x}, \quad \forall\, \hat{x} \in \widehat{E};$$

$$j(\bar{f}(\hat{x}_1)) = \hat{x}_1, \quad \forall\, \hat{x}_1 \in \widehat{E}_1.$$

これは，j と $\bar{f}$ は互いに他の逆であって，共に同形写像であることを意味している．

以上で定理 5.2 の証明は完成した．

今後常に，E を $i(E)$ と同一視して，E は $\widehat{E}$ の稠密な部分ベクトル空間と見なすことにする．

演　習　問　題

5.1. E, F を二つの TVS とする．$\widehat{E} \times \widehat{F}$ と $(E \times F)^\wedge$ の間には，標準的同形写像が存在することを示せ．

5.2. 実数直線 $\mathbf{R}^1$ 上で定義された一回連続的微分可能な複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ とする．また，$f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ であって，ある有限区間 $[a,b]\,(-\infty < a < b < +\infty)$ の外では0になるもの［区間は f によって変ってもよいとする］の全体を $\mathcal{C}^1_0(\mathbf{R}^1)$ とする．いま $\varepsilon > 0$ と $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathscr{W}_{\varepsilon,n} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)\,;\ \sup_{|t|<n} \{|f(t)|+|f'(t)|\} \leqslant \varepsilon\}$$

とおく．

$\mathscr{W}_{\varepsilon,n}$ は $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ 上の線形構造と整合する一つの Hausdorff 位相に関する基本近傍系を成すことを示せ．

TVS $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ は完備であることを証明せよ．

$\mathcal{C}^1_0(\mathbf{R}^1)$ は $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ の稠密な部分ベクトル空間であることを証明せよ．これは $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$ が $\mathcal{C}^1_0(\mathbf{R}^1)$ の完備化と同形であることを意味するか？

5.3. $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$，$\mathcal{C}^1_0(\mathbf{R}^1)$ は前問に述べた位相を持っているとする．$\mathbf{R}^1$ 上の複素数値連続関数の全体を $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)$ とし，その位相は，0 の基本近傍系として集合族

$$\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)\,;\ \sup_{|t|<n} |f(t)| < \varepsilon\},\ \ \varepsilon > 0,\ \ n = 1, 2, \ldots,$$

をとることにより定める．

写像 $f \mapsto f'$ を考え，それを D と書く．D は $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$（または $\mathcal{C}^1_0(\mathbf{R}^1)$）から $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)$ への連続写像であることを証明せよ．D の性質を利用して，次のことを示せ．E, F を TVS とし，u を連続線形単射（1 対 1 写像）としても，その完備化への拡張 $\hat{u} : \hat{E} \to \hat{F}$ は必ずしも 1 対 1 ではない．もし u が E から F の中への（TVS の）同形写像ならば，$\hat{u}$ は 1 対 1 になることを証明せよ．

5.4. E を TVS，E^* をその代数的双対とする．E^* に E 上の各点収束の位相を入れる．この位相に関する E^* の 0 の基本近傍系は，

$$\mathscr{W}(S, \varepsilon) = \{x^* \in E^*\,;\ \sup_{x \in S} |x^*(x)| \leqslant \varepsilon\}$$

$S : E$ の有限集合，$\varepsilon > 0$ を動いたときに得られるものである．E^* は完備であることを証明せよ．

5.5. $\{E_\alpha\}$ を任意の TVS の族，E をその積，p_α を座標射影 $E \to E_\alpha$ とする．E 上のフィルター $\mathscr{F}$ が Cauchy フィルターであるための必要十分条件は，各 p_α による $\mathscr{F}$ の像が E_α 上の Cauchy フィルターになることである．これを証明せよ．また E が完備になるのは，各 E_α が完備なときかつそのときに限ることを示せ．（演習問題 1.9 参照）

5.6. 次に掲げる TVS のうちで，どれが完備であるか．またどれが完備でないか．

(1)　一変数の形式的巾級数の空間 $\mathbf{C}[[X]]$；位相は係数の単純収束の位相とする（33 頁）．

(2)　複素数の有限列 $s = (s_1, \ldots, s_\nu)$（$\nu < \infty$，ただし ν は s によって変り得る）全体の

空間；位相は 0 の基本近傍系

$$\mathscr{U}(\varepsilon)=\{s=(s_j)\,;\ \sup_j|s_j|\leqslant\varepsilon\},\quad \varepsilon>0$$

により定める．

(3) 実数直線上の複素数値連続関係であって，無限遠で 0 に収束する ($|t|\to\infty$ のとき $|f(t)|\to 0$) もの全体の空間；位相は**一様収束の位相** (topology of uniform convergence) すなわち，0 の基本近傍系として

$$\mathscr{U}_1(\varepsilon)=\{f\,;\ \sup_t|f(t)|\leqslant\varepsilon\},\quad \varepsilon>0$$

をとる．

(4) 閉区間 [0, 1] 上の複素数値連続関数の全体の空間；位相は 0 の基本近傍系として

$$\mathscr{V}(\varepsilon)=\left\{f\,;\ \int_0^1|f(t)|dt\leqslant\varepsilon\right\},\quad \varepsilon>0.$$

5. 7. 演習問題 3. 5 で定義された TVS $\mathscr{F}_c(\mathbf{N}\,;\,\mathbf{C})$ は完備であることを証明せよ．

6.

コンパクト集合

一つの位相空間 X (TVS の部分集合とは限らぬ) が**コンパクト** (compact) であるとは，X が Hausdorff 空間であり，X の任意の**開被覆** (open covering) $\{\Omega_i\}$ が**有限部分被覆** (finite subcovering) を持つことをいう．$\{\Omega_i\}$ が X の開被覆とは，各 Ω_i が X の開集合であって，それらの合併が X に等しいことをいう．被覆 $\{\Omega_i\}$ の有限部分被覆とは，Ω_i の有限個の集り $\{\Omega_{i_1},\dots,\Omega_{i_r}\}$ であって，その合併がすでに X に等しいものをいう．開集合 Ω_i の補集合に移れば，**コンパクト性** (compactness) の同値な定義を得る：Hausdorff 空間 X がコンパクトであるとは，任意の閉集合族 $\{F_i\}$ でその共通部分が空なものはその有限部分族で共通部分が空なものを含むことである．

今後考察するコンパクトな空間は，ほとんど常に，ある TVS の部分集合に，その TVS の位相から導かれた位相を入れたものである．これらを**コンパクト集合** (compact sets) とよぶ．Y を Hausdorff 空間 X の部分集合とする．Y の位相は X の位相から導かれたものとする．Y の部分集合 B が開集合であるためには，X の開集合 A が存在して $B = A \cap Y$ となることが必要十分である．このことからわかるように，Y の開被覆は，X の開集合族でその合併が Y を含むものから‘導かれる’(誘導される)．かくして，X の部分集合 K がコンパクトになるための条件は，X の開集合族でその合併が K を含むものはいつでもその有限部分族で K を含むものを持つことである．注意しておくべきことは，コンパクト集合の多くの性質は，大抵の場合，それを含んでいる空間に関係しないということである．このコンパクト性の特質は，間もなく明らかになる；

まず，コンパクト集合の幾つのよく知られた性質（線形構造は考慮しない）を証明なしに述べることから始めよう．

命題 6.1 コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．

命題 6.2. f をコンパクト空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続写像とすれば，$f(X)$ は Y のコンパクト集合である．

命題 6.3. f をコンパクト空間 X からコンパクト空間 Y の上への1対1連続写像とすれば，f は位相写像である（すなわち f^{-1} も連続になる）．

命題 6.4. $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ を集合 X 上の二つの Hausdorff 位相とする．$\mathcal{T}$ は $\mathcal{T}'$ よりも細かいとし，X に $\mathcal{T}$ を入れたときコンパクトになるとする．このとき $\mathcal{T}=\mathcal{T}'$ を得る．

コンパクト集合の有限個の合併，任意個の共通部分はすべてコンパクトになる．Hausdorff 空間 X においては，各点はコンパクトである；収束する列にその極限を付加すればコンパクトである．

コンパクト集合が大変複雑な集合であり得ることに，諸者は留意されたい．たとえば実数直線 $\mathbf{R}^1$ を考える．Borel-Lebesgue-Heine の定理[1]によれば，$\mathbf{R}^1$ のコンパクト集合は有界な閉集合に一致する．また点列の Lebesgue 測度は0であることに注意しよう．もし集合 A が可測とすれば，任意 $\varepsilon>0$ に対してコンパクト集合 $K \subseteq A$ が存在して $A \cap \complement K$ の測度が $\leqslant \varepsilon$ となる．無理数 x で $0 \leqslant x \leqslant 1$ なるものの全体を考えると，その測度は1である，なぜなら有理数全体は点列であってその測度は0だから．このことは，区間 $[0,1]$ に含まれるコンパクト集合であって，有理数を一つも含まず，しかもその Lebesgue 測度が1にいくらでも近い集合が存在することを意味している．そのような集

1) Heine-Borel の定理といわれることが多い．

合を図示できるだろうか!

Weierstrass–Bolzano の定理が示すように，コンパクト集合は点列と関係する興味深い性質を持っている．これらはフィルターの場合に拡張される．それをこれから見てゆこう．さて，しばらくの間 E は Hausdorff 空間とする．(E が TVS のときは，いちいち断ることにする.)

次の術語は有用である．

定義 6.1. E の点 x がフィルター $\mathscr{F}$ の**集積点** (accumulation point) であるとは，x が $\mathscr{F}$ に属する各集合の閉包に属することをいう．

$S=\{x_0, x_1, \dots\}$ を点列とする．E の点 x が S の集積点であるというのは，普通は，x のどんな近傍も x 以外の S の点を含むことをいう．この用語は，S に付随するフィルター $\mathscr{F}_S$ (7 頁) の定義 6.1 によるものと一致する．$M\in\mathscr{F}_S$ を任意にとる．M は次の形の部分列

$$S_n=\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

を含む．もし x が S の集積点ならば，x の任意の近傍 U がいくらでも大きい番号 k の点 x_k を含むから，特に $k\geqslant n$ としてよい．したがって U は M と空でない交わりをもつ，すなわち $x\in\bar{M}$．換言すれば，S のどの集積点もフィルター $\mathscr{F}_S$ の集積点である．逆に，x を $\mathscr{F}_S$ の集積点としよう．x は $\mathscr{F}_S$ に属するすべての集合の閉包に属する．特に S_n $n=0,1,\dots$ の閉包に属する．これは，x の任意の近傍 U と任意の n に対して，$k\geqslant n$ が存在して $x_k\in U$ となることを意味する．すなわち x は S の集積点である．

命題 6.5. もしフィルター $\mathscr{F}$ が点 x に収束すれば，x は $\mathscr{F}$ の集積点である．

実際，x は $\mathscr{F}$ の集積点ではないと仮定すると，$M\in\mathscr{F}$ なる集合 M が存在して $x\notin\bar{M}$，このとき $\bar{M}$ の補集合 U は開集合になり，したがって U は x の近傍である．$\mathscr{F}$ は x に収束するのだから $U\in\mathscr{F}$．ゆえに，$M\cap U\in\mathscr{F}$．これは $M\cap U=\emptyset$ に矛盾する．

もちろん一つのフィルターが多くの集積点をもつことがある．たとえば，あたえられた集合 A を含むすべての部分集合からなるフィルターを $\mathscr{F}$ とすれば，A の各点が $\mathscr{F}$ の集積点になる．

命題 6.6. 次の二条件は同値である．

(a)　x は $\mathscr{F}$ の集積点である．

(b)　$\mathscr{F}$ および x の近傍フィルターのどちらよりも細かいフィルター $\mathscr{F}'$ が存在する．換言すれば，$\mathscr{F}$ よりも細かくて x に収束するフィルター $\mathscr{F}'$ が存在する．

(a) ⇒ (b)．実際，U が $\mathscr{F}(x)$ を動き，M が $\mathscr{F}$ を動くときの $U\cap M$ の形の部分集合の族を考えると，x が $\mathscr{F}$ の集積点だからこれらの集合はどれも空ではない．また条件(BF)は明らかに成り立つ(8頁)．したがってこれらの集合で生成されるフィルター $\mathscr{F}'$ は $\mathscr{F}$ および $\mathscr{F}(x)$ よりも細かい．

(b) ⇒ (a)．フィルター $\mathscr{F}$ がフィルター $\mathscr{F}'$ より粗らければ，x' が $\mathscr{F}'$ の集積点ならもちろん $\mathscr{F}$ の集積点である．したがって (b) と命題 6.5 から (a) が出る．

命題 6.7. TVS E 上の Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ が集積点 x を持てば，$\mathscr{F}$ は x に収束する．

U を原点の任意の近傍とし，V を $V+V\subseteq U$ なる原点の近傍とする．すると [$\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターだから] $M-M\subseteq V$ となる $M\in\mathscr{F}$ が存在する．他方 $V+x$ は M と交わる．したがって $M-M\cap(V+x)\subseteq V$．あるいは，書きなおして

$$M\subseteq V+M\cap(V+x)\subseteq V+V+x\subseteq U+x \qquad \text{(証終)}.$$

命題 6.8. K を Hausdorff 空間とする．次の二条件は同値である．

(a)　K はコンパクト．

(b)　K 上の任意のフィルターは少なくとも一つ集積点を持つ．

(a) ⇒ (b). $\mathscr{F}$ を K 上のフィルターとして，M が $\mathscr{F}$ の中を動くときの $\overline{M}$ の全体を考える．有限個の $\overline{M}$ の共通部分は決して空にならないから，すべての共通部分も空でない．

(b) ⇒ (a). Φ を閉集合の族であって，それに属する集合全部の共通部分は空であるとしよう．さらに，Φ の任意の有限部分族は空でないと仮定する[1]．このとき，Φ に属する集合の有限個の共通部分全体を Φ' とする．Φ' は明らかに一つのフィルターの基底になる．このフィルターは [仮定により] 集積点をもつ，その一つを x とする．したがって，x はこのフィルターに属する任意の集合の閉包に属する，特に Φ' の任意の集合に属する，なぜなら Φ' の集合はすべて閉じているから．換言すれば，x は Φ' に属する集合全部の共通部分に入っている．この共通部分は Φ の集合全部の共通部分と同じであるが，それは空集合の筈であった！ (証終).

系 1. Hausdorff 空間 E のコンパクト部分集合 K は閉集合である．

証　明　$x \in \overline{K}$ とし，$\mathscr{F}(x)|K$ を，U が x の近傍フィルター $\mathscr{F}(x)$ を動くときの $U \cap K$ の全体によって生成される K 上のフィルターとする；$U \cap K$ の全体がフィルター基底を成すことが丁度 x が K の閉包に属することを意味している．命題 6.8 によって，$\mathscr{F}(x)|K$ は集積点 $x_1 \in K$ を持つ．このとき $x_1 = x$ でなければならない．なぜなら，そうでないとすると，x の近傍 U であって E におけるその補集合が x_1 の近傍になるようなものが存在する．このときには $x_1 \notin \overline{U}$，ゆえにもちろん $x_1 \notin \overline{U \cap K}$，これは集積点の仮定に反する．したがって $x = x_1 \in K$.

系 2. Hausdorff TVS のコンパクト集合は完備である

これは命題 6.7 と 6.8 から明らか．

系 3. コンパクト空間 K においては，すべての点列は集積点をもつ．

---

1) これは結局 K がコンパクトでないと仮定したことになる．

定義 6.2. 位相空間 X の部分集合 A が**相対コンパクト** (relatively compact) であるとは，A の閉包 $\overline{A}$ がコンパクトなときにいう．

収束列は（その極限を付加しなくても）相対コンパクトである．

定義 6.3. Hausdorff TVS E の部分集合 A が**プレコンパクト** (precompact) であるとは，A を E の完備化 $\widehat{E}$ の部分集合と考えて相対コンパクトなことをいう．

E の Cauchy 列はプレコンパクトである，しかし相対コンパクトであるとは限らない！ なぜなら，後者の場合は収束することを意味するから（命題 6.7）．相対コンパクトとプレコンパクトの相異を説明するための他の例として，次のものを考えよう．Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合であって，$\mathbf{R}^n$ とは一致しないものとする．Heine–Borel–Lebesgue の定理によって，Ω に含まれる任意の有界開集合がプレコンパクトである．しかし Ω の開部分集合 Ω' が Ω において相対コンパクトになるのは，Ω' が有界であると同時にその閉包が Ω に含まれていなければならない．

Hausdorff TVS E の部分集合 K がコンパクトになるのは，K が完備かつプレコンパクトなときそのときに限る．実際 K が E の部分集合としてコンパクトなら $\widehat{E}$ の部分集合と考えてもコンパクトだから，命題 6.8 の系 1.2 によって，K は $\widehat{E}$ で閉集合，したがって完備である．K はコンパクトだから，$\widehat{E}$ におけるその閉包も K 自身に一致することはいうまでもない．ゆえに K は $\widehat{E}$ で相対コンパクト，すなわちプレコンパクトである．逆に K が完備であれば，$\widehat{K}=K$ [1] ところで K がプレコンパクトなら $\widehat{K}$ がコンパクト，ゆえに K がコンパクト．

我々の目的は，後に利用するプレコンパクト性の判定条件を証明することにある．この証明は**ウルトラフィルター** (ultrafilter) の概念を利用することによって非常にやさしくなる．

1) $\widehat{K}$ はここでは $\widehat{E}$ における K の閉包としておく．K が完備であれば，命題 6.3 により $\widehat{E}$ でも閉集合．$\widehat{K}=K$.

定義 6.4. 集合 A 上のフィルター $\mathfrak{U}$ が**ウルトラフィルター**であるとは，$\mathfrak{U}$ より細かいフィルターはすべて $\mathfrak{U}$ に一致することをいう．[1]

補題 6.1. $\mathscr{F}$ を集合 A 上のフィルターとすれば，A 上のウルトラフィルターであって $\mathscr{F}$ より細かいものが少なくとも一つ存在する．

証 明 A 上のフィルターで $\mathscr{F}$ より細かいもの全体を Φ とする．Φ には，"より細い" (to be finer than) という順序関係が入る．Φ' をこの関係による**全順序部分族** (totally ordered subfamily) とする．Φ' の元はフィルターである，すなわち，A の部分集合全体のなる集合 $\mathfrak{P}(A)$ の部分集合であるから，その $\mathfrak{P}(A)$ における合併を $\mathscr{F}'$ とする．$\mathscr{F}'$ が A 上のフィルターになることはただちにわかる．また，$\mathscr{F}'$ は明らかに $\mathscr{F}$ より細かい．したがって，順序集合 Φ に **Zorn の補題**[2] (Zorn's lemma) を適用することにより $\mathscr{F}$ より細かいウルトラフィルターの存在を得る．

補題 6.2. A を位相空間，$\mathfrak{U}$ を A 上のウルトラフィルターとする．$\mathfrak{U}$ が A で集積点 x を持つとすれば，$\mathfrak{U}$ は x に収束する．

証 明 命題6.6によると，$\mathfrak{U}$ が集積点 x をもてば，$\mathfrak{U}$ より細かいフィルター $\mathscr{F}$ が存在して x に収束する．$\mathfrak{U}$ はウルトラフィルターだから $\mathfrak{U} = \mathscr{F}$.

補題 6.3. Hausdorff 空間 K がコンパクトになるための必要十分条件は，K 上のすべてのウルトラフィルターが収束することである．

証 明 K がコンパクトなら，K 上のすべてのフィルターが集積点をもつ

---

1) すなわち，$\mathfrak{U}$ より '真に' 細かいフィルターが存在しないことである．これは，フィルターの包含関係に関して，**極大** (maximal) であることを意味する．この意味で**極大フィルター** (maximal filter) ともいう．

2) Zorn の補題は次のように述べられる：Φ を (抽象的) 順序集合とする．Φ の任意の全順序部分集合 (すなわち，その部分集合の任意の二元が比較可能なもの) が**上界** (upper bound，その部分集合のすべての元より大きい元) を持つとすれば，Φ には**極大元** (maximal element) が存在する．

(命題6.8)，ゆえにすべてのウルトラフィルターは収束する(前補題)．逆に K 上のすべてのウルトラフィルターが収束するとし，$\mathscr{F}$ を K 上の任意のフィルターとする．補題6.1により $\mathscr{F}$ より細かいウルトラフィルター $\mathfrak{U}$ が存在する．$\mathfrak{U}$ はある点 x に収束する．命題6.6により，x は $\mathscr{F}$ の集積点である．よって，命題6.8により，K はコンパクト． (証終)

さて，先に述べたプレコンパクト性の判定条件を述べよう．

命題 6.9. Hausdorff TVS E の部分集合 K に関して，次の二条件は同値である．

(a) K はプレコンパクト．

(b) E の原点の任意の近傍 V に対して，K の有限個の点 $x_1,\dots,x_r$ が存在して，集合族 x_i+V が K を覆う．すなわち

$$K\subseteq(x_1+V)\cup\cdots\cup(x_r+V).$$

証 明 (a)ならば(b)．V を E の原点の近傍とし，U を V に含まれる原点の開近傍とする．すると，$\hat{E}$ の原点の開近傍 $\hat{U}$ が存在して $U=\hat{U}\cap E$ となる開集合族 $x+\hat{U}$, $x\in K$ を考えると，これは K の $\hat{E}$ における閉包 $\hat{K}$ を覆う．実際 $\hat{y}$ を $\hat{K}$ の任意の点とし，$\hat{W}$ を $\hat{E}$ の 0 の近傍であって $\hat{W}=-\hat{W}\subseteq U$ なるものとすると，$x\in K$ であって $x\in\hat{y}+W$ なるものが存在する．ゆえに $\hat{y}\in x+\hat{W}\subseteq x+U$．コンパクト集合 K のこの開被覆 $\{x+\hat{U};x\in K\}$ は有限部分被覆を含む．それを $x_1+\hat{U},\dots,x_r+\hat{U}$ とする．このとき，

$$K=\hat{K}\cap E\subseteq[(x_1+\hat{U})\cap E]\cup\cdots\cup[(x_r+\hat{U})\cap E]$$
$$\subseteq(x_1+V)\cup\cdots\cup(x_r+V).$$

(b)ならば(a)．K が条件(b)をみたせば，その $\hat{E}$ における閉包 $\hat{K}$ は $\hat{E}$ において条件(b)をみたす．実際 $\hat{V}$ を $\hat{E}$ の原点の任意の近傍とし，$\hat{W}$ を $\hat{E}$ の 0 の閉近傍であって $\hat{V}$ に含まれるものとしよう．すると K の有限個の点 $x_1,\dots,x_r$ が存在して

$$K\subseteq(x_1+\hat{W})\cup\cdots\cup(x_r+\hat{W})$$

この式の右辺は $\hat{E}$ の閉集合だから，$\hat{E}$ における $\hat{K}$ の閉包もそれに含まれる．す

なわち $\widehat{K}$ も $\widehat{E}$ で条件 (b) を満足する．このことから，完備な Hausdorff TVS E の閉集合 K が条件 (b) をみたせば，K はコンパクトであることを証明すればよい．補題 6.3 によれば，このとき K 上の任意のウルトラフィルター $\mathfrak{U}$ が K の点に収束することを示せばよい．

V を E の 0 の任意の近傍とし，$x_1,\ldots,x_r$ を K の有限個の点であって x_j+V, $j=1,\ldots,r$ が K の被覆になるものとする．このとき，どれか一つの x_j+V が $\mathfrak{U}$ に属することをいおう．まず，これらの集合のうちの一つが $\mathfrak{U}$ のすべての集合と交わることを示そう．実際，そうでないと仮定すると，各 $j=1,\ldots,r$ に対して $M_j\in\mathfrak{U}$ が存在して x_j+V とは交わらない，このとき $M_1\cap\cdots\cap M_r$ は，どの x_j+V にも交わらないから K と交わらないことになって，空集合になる．これは $\mathfrak{U}$ がフィルターであることに矛盾する．そこで，たとえば x_i+V が $\mathfrak{U}$ のあらゆる集合と交わるとしよう．すると，M が $\mathfrak{U}$ を動くときの $M\cap(x_i+V)$ の全体は，K 上の一つのフィルターの基底をなす．このフィルターは明らかに $\mathfrak{U}$ より細かい．ところが $\mathfrak{U}$ はウルトラフィルターだから $\mathfrak{U}$ に一致する．換言すれば，集合 x_i+V は $\mathfrak{U}$ に属する．いまこの集合の二点を y,z とすれば，$y-z\in V-V$．いま U を E の原点の任意の近傍とし，V を $V-V\subseteq U$ なるように選んであったとすれば，$y-z\in U$ となる．言い換えれば，任意の 0 の近傍 U に対して，$M\in\mathfrak{U}$ で $M-M\subseteq U$ なる集合 $[M=x_i+V]$ の存在が示された．したがって $\mathfrak{U}$ は Cauchy フィルターであり，E が完備だから，一点 x に収束する．K は閉集合だったから $x\in K$ (証終).

演 習 問 題

6.1. 補題 6.3 のコンパクト性の判定法を用いて，**Tychonov の定理** (Tychonov's theorem) の次の形式を証明せよ．

定理 6.1. $\{E_i\}(i\in I)$ を Hausdorff TVS の族とし，$E=\prod_{i\in I}E_i$ をその積空間とする (積 TVS の構造を入れる)．各添字 i に対し，E_i の部分集合 A_i をとり，積集合 $A=\prod_{i\in I}A_i$ を考える．A を E の部分集合と考えたとき，A がコンパクトになるのは，各 i

に対し A_i がコンパクトになるときそのときに限る.

6.2.　Hausdorff TVE E のコンパクト部分集合 K の**平衡包** (balanced hull, すなわち K を含む最小の平衡的集合) はコンパクトであることを証明せよ.

6.3.　TVS E がコンパクトになるのは, E が唯一の元 0 だけからなるときに限ることを証明せよ.

6.4.　非負整数全体の集合 $\mathbf{N}$ 上の複素関数の空間 $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ を考える (演習問題 3.5 で考えた位相を入れる). $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ の収束列は適当な $\mathscr{F}_c(n)$ に含まれることを示せ (演習問題 3.6 参照, n は考える収束列によって異る). このことから, $\mathscr{F}_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ のコンパクト集合は, ある有限次元の部分空間に含まれることを導け.

6.5.　E を演習問題 3.4 の (a)――(d) に述べた TVS の一つとする. E の任意の無限次元部分ベクトル空間 M に, E における収束列であって M のどんな有限次元部分空間にも含まれないものが存在することを示せ.

7.

局所凸空間，セミノルム

ベクトル空間 E の部分集合 K が**凸** (convex) であるとは，K の任意の二点 x, y を結ぶ線分が常に K に含まれることをいう．すなわち，$x, y \in K$，α, β 実数 $\geqq 0, \alpha+\beta=1$ とすれば，

$$\alpha x+\beta y \in K.$$

E の任意の部分集合 S に対して，S の**凸包** (convex hull) を，その和が 1 であるような非負係数による S の元の一次結合の全体がなす集合として定義する．したがって一つの集合が凸になるのは，その集合がその凸包に一致するときである．また，集合 S の凸包は S を含む最小の凸集合である．

任意の凸集合の共通部分は凸である．凸集合の合併は一般には凸ではない．線形写像による凸集合の像および逆像は凸である．

命題 7.1. E を TVS とする．凸集合の閉包および内部はまた凸集合である．

閉包に関しては命題は明らかである．しかし内部の場合にはそうはゆかない．K を凸集合とし，$\mathring{K}$ をその内部とする．x, y を $\mathring{K}$ の任意の二点とし，それらを結ぶ線分上の一点を z とする．$z \in K$ は明らか，$z \in \mathring{K}$ を示そう．z が x, y を結ぶ線分上にあるから，ある $t, 0 \leqq t \leqq 1$ に対して

$$z=tx+(1-t)y$$

と書ける．他方，E の 0 の近傍 U が存在して，$x+U \subseteq K$，$y+U \subseteq K$ である．もちろん，このとき $z+U \subseteq K$ となればよいのだが，事実これが成り立つ．な

ぜなら，$z+U$ の任意の元 $z+u$, $u\in U$ を書き直すと，

$$tx+(1-t)y+tu+(1-t)u = t(x+u)+(1-t)(y+u)$$

となり，$x+u$, $y+u$ 共に K に属するから $z+u$ も K に入る.

定義 7.1. TVS E の部分集合 T が**樽** (barrel) であるとは，次の四条件をみたすことをいう.

(1)　T は吸収的 (定義 3.1)；

(2)　T は平衡的 (定義 3.2)；

(3)　T は閉；

(4)　T は凸.

U を E の 0 の任意の近傍とする. 集合

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbf{C},|\lambda|\leqslant 1}\lambda U \tag{7.1}$$

の**閉凸包** (closed convex hull)，すなわち集合 (7.1) の凸包の閉包を $T(U)$ で表わす. すると $T(U)$ は一つの樽である. 条件 (3), (4) は明らか, (1) も $U\subseteq T(U)$ だからよい. 残るところは $T(U)$ が平衡的なことを示すことである. それには，集合 (7.1) の凸包が平衡的をいうとよい (平衡的集合の閉包は明らかに平衡的だから). この凸包の任意の元 z は

$$z = tx+(1-t)y$$

と書ける. ただし $x\in\lambda U$, $y\in\mu U$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $|\lambda|\leqslant 1$, $|\mu|\leqslant 1$. いま $\zeta\in\mathbf{C}$, $|\zeta|\leqslant 1$ とすると

$$\zeta z = t(\zeta x)+(1-t)(\zeta y)$$

となり，$\zeta x\in\zeta\lambda U$, $\zeta y\in\zeta\mu U$ となるが，$|\zeta\lambda|\leqslant|\lambda|$, $|\zeta\mu|\leqslant|\mu|$ だからよい.

かくして，TVS においては 0 の任意の近傍は樽であるような近傍に含まれる[1]が，もちろん任意の 0 の近傍が 0 の樽近傍を含むわけではない. いわんや，任意の樽が 0 の近傍になるわけではない.

---

1)　このことだけなら，全空間 E は樽だから明らか.

定義 7.2. TVS E が**局所凸空間** (locally convex space) であるとは，E の 0 の基本近傍系で凸集合だけからなるものが存在することをいう．

命題 7.2. 局所凸空間 E においては，樽から成る 0 の基本近傍系が存在する．

U_1 を E における 0 の任意の近傍とする．E は TVS だから，U_1 は 0 の閉近傍 V を含む (命題 3.1)．他方 E は局所凸だから，V は 0 の凸近傍 W を含む．最後に W は 0 の平衡的近傍 U を含む．U は平衡的だから，U から作る集合 (7.1) は U 自身に一致する．したがってその凸包は W に含まれる (W は凸だから)．この凸包の閉包 $T(U)$ は樽で，それは V に含まれ (V は閉)，したがって U_1 に含まれる．(証終)

E をベクトル空間とする．E の凸であって平衡的な吸収的集合の族 $\mathcal{B}$ を与えたとき，それが E の線形構造に整合する一つの位相による 0 の基本近傍系になることを確めるのは非常にやさしい．(このとき E は必然的に局所凸！) 実際そのためには $\mathcal{B}$ が次の二条件をみたせばよい．

(*) 二つの集合 $U, V \in \mathcal{B}$ に対して，$W \in \mathcal{B}$ が存在して

$$W \subseteq U \cap V.$$

(**) 任意の $U \in \mathcal{B}$ と任意の $\rho > 0$ に対して，$W \in \mathcal{B}$ が存在して

$$W \subseteq \rho U.$$

このとき $\mathcal{B}$ によって生成されるフィルターが定理 3.1 の条件 (3.1)—(3.5) をみたすことを検証すればよい．特別の場合として，一つの平衡的吸収的凸集合 U をとって，そのすべての正のスカラー倍 ρU, $\rho > 0$ を考えると，これは E 上の一つの局所凸位相に関する 0 の基本近傍系になる．(U に関する条件をゆるめると，一般には正しくなくなる)．

定義 7.3. ベクトル空間 E 上の非負値関数 $x \mapsto p(x)$ が**セミノルム** (semi-norm) であるとは，次の条件をみたすときにいう．

(1) p は**劣加法的** (subadditive), すなわち, すべての $x, y \in E$ に対して

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y);$$

(2) p は**正斉次** (positively homogeneous)[1], すなわち, すべての $x \in E$ とすべての $\lambda \in \mathbf{C}$ に対して

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x);$$

(3) $p(0) = 0$ (これは条件 (2) から出る).

定義 7.4. ベクトル空間 E 上のセミノルム p が**ノルム** (norm) であるとは, 次の条件をみたすときにいう.

$$x \in E, p(x) = 0 \quad ならば \quad x = 0.$$

例 (1) $E = \mathbf{C}^n$ とし, M を E の部分ベクトル空間とする. $p_M(x) = (x$ から M への距離) とする[2]. 距離は $\mathbf{C}^n$ における慣用のものである[2]. もし $\dim M \geqslant 1$ ならば, p_M はセミノルムであるがノルムではない (M は丁度 p_M の零点になる). $M = \{0\}$ なら p_M はユークリッド・ノルムになる.

$\mathbf{C}^n$ における [他の] ノルムの例 (11 章 定理 11.1 参照).

$$\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mapsto |\zeta|_p = (|\zeta_1|^p + \cdots + |\zeta_n|^p)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\zeta \mapsto |\zeta|_\infty = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\zeta_j|.$$

$|\zeta|_2$ がユークリッドまたはエルミート・ノルムである. 本書では, このノルムを単に $|\zeta|$ と書くことにする. 後に微分作用素を取り扱う際に, ノルム $|\ |_1$ を非負整数座標のベクトルに用いるであろう.

例 (2) E をベクトル空間とし, $B(e, f)$ をその上の**準双線形形式** (sesquilinear form) とする[3]. 準双線形とは:

---

1) 正確には '一次正斉次' というべきだが短くした.

2) $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ を $\mathbf{C}^n$ の二点とすれば, その距離は $d(x, y) = (\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. x から M までの距離は $d(x, M) = \inf\{d(x, y)\,;\, y \in M\}$ で定義する.

3) 双線形 (または双一次 bilinear) は各変数について線形なこと; 準双線形 (sesquilinear) とは, 一つの変数について線形, 他の変数について半線形 (semilinear). 合計して 3/2 線形の意である. 熟した訳語はなく, 仮に準双線形とした.

$$B(e_1+e_2, f) = B(e_1, f)+B(e_2, f)\,;$$
$$B(e, f_1+f_2) = B(e, f_1)+B(e, f_2)\,;$$
$$B(\lambda e, f) = \lambda B(e, f)\,;$$
$$B(e, \lambda f) = \bar{\lambda} B(e, f)$$

となることをいう．($B(e, f)$ は複素数値関数，$\bar{\lambda}$ は λ の共役複素数.) さらに $B(e, f)$ がエルミート的，すなわち

$$B(e, f) = \overline{B(f, e)}$$

と仮定する．[このときエルミート形式という]．すると，すべての $e \in E$ に対し $B(e, e)$ は実数となることに注意しよう．この実数が決して負にならないとき，B は**非負** (non-negative) という．このとき Schwarz の不等式 (12 章命題 12.1 とその系参照) を用いて

$$e \mapsto (B(e, e))^{1/2} \tag{7.2}$$

は E 上のセミノルムになることが証明される．これがノルムになるのは，B が**正定値** (positive definite)，すなわち $B(e, e) > 0$，$\forall e \in E$ のときそのときに限る．

定義 7.5. 複素数体上のベクトル空間 E にその上の非負エルミート形式を合せ考えたものを**準 Hilbert 空間** (pre-Hilbert space) という．

例 (3) 実数直線上の複素数値連続関数全体のなすベクトル空間 $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)$ を考える．任意の有界区間 $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ と任意の $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)$ に対して

$$p_{[a,b]}(f) = \sup_{a<t<b} |f(t)|$$

と置く．すると $f \mapsto p_{[a,b]}(f)$ はセミノルムである．これは決してノルムにはならない．なぜなら，f は恒等的には 0 でなくて，いくらでも $[a, b]$ 上で 0 になり得るからである．他のセミノルムの例としては

$$f \mapsto |f(0)|$$
$$f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < +\infty. \tag{7.3}$$

ここで(7.3)がセミノルムになることは決して自明ではない. 三角不等式, つまり(7.3)の劣加法性を証明しなければならない. $p<1$ ならば(7.3)は劣加法的ではない. したがってセミノルムにはなり得ない.

例 (4)　$l^p, (1 \leqslant p < +\infty)$ を, 複素数列 $(c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ であって

(7.4)
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^p\right)^{1/p} < +\infty.$$

なるもの全体のなすベクトル空間とする. (7.4)の左辺は l^p 上のノルムと考えることができる. ここでも, 劣加法性の成り立つのは $p \geqslant 1$ のときである. また, l^∞ を有界な複素数列のベクトル空間として定義する. すなわち, 数列 $(c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots)$ であって

(7.5)
$$\sup_{j=0,1,\ldots}|c_j| < +\infty$$

となるもの全体である. (7.5)の左辺は l^∞ 上のノルムを定義する.

定義 7.6. E をベクトル空間, p をその上のセミノルムとする. 集合

$$U_p = \{x \in E; p(x) \leqslant 1\}, \qquad \mathring{U}_p = \{x \in E; p(x) < 1\}$$

をそれぞれ, p の**閉単位球** (closed unit semiball), **開単位球** (open unit semiball) とよぶ[1].

命題 7.3. E を TVS, p を E 上のセミノルムとする. 次の三条件は同値である.

(a)　p の開単位球は開集合;

(b)　p は原点で連続;

(c)　p は各点で連続.

(a)から(b)が出ること. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\mathbf{R}^1$ の開区間 $]-\varepsilon, \varepsilon[$ [2] の p に

1)　セミノルムを距離と考えたときの球 (ball) だから, semiball を直訳しない方がよいと考えた. '半球' は誤解をまねく.

2)　$\{t \in \mathbf{R}^1; -\varepsilon < t < \varepsilon\}$

よる逆像は $\varepsilon \mathring{U}_p$ であるが，これは (a) によって開集合すなわち 0 の近傍だからよい．

(b) から (c) が出ること．これは p の劣加法性

$$|p(x)-p(y)| \leqslant p(x-y)$$

からよい．

(c) から (a) が出ること．これは，連続写像による開集合の逆像は開集合だからよい．

命題 7.4. p を TVS E 上の連続なセミノルムとすれば，その閉単位球は樽である．

これは定義から明らか．

命題 7.5. E をTVS, T を E の樽とする．このとき T をその閉単位球とする E 上のセミノルム p が唯一つ存在する．この p が連続になるのは，T が 0 の近傍であるときそのときに限る．

後半は，T が p の閉単位球であることと命題 7.3 からただちに出る．したがって前半を証明しよう．

さて

$$p(x) = \inf_{\lambda>0,\, x\in\lambda T} \lambda$$

と置く

まず，p は非負値関数である．p がいたるところ有限な値をとるのは T が吸収的なことによる．$p(\zeta x) = |\zeta| p(x)$ はほとんど明らか．検証すべきことは p の劣加法性である．$x, y \in E$ を任意にとる．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\lambda, \mu > 0$ が存在して

$$p(x) \leqslant \lambda \leqslant p(x)+\varepsilon, \qquad x \in \lambda T;$$
$$p(y) \leqslant \mu \leqslant p(y)+\varepsilon, \qquad y \in \mu T.$$

T は凸だから

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}T+\frac{\mu}{\lambda+\mu}T \subseteq T.$$

ゆえに $x+y \in (\lambda+\mu)T$ となり，したがって

$$p(x+y) \leqslant \lambda+\mu \leqslant p(x)+p(y)+2\varepsilon.$$

ε は任意だったから，これから p の劣加法性が出る．次に T が p の閉単位球であることを示そう．$p(x) \leqslant 1$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $y_\varepsilon \in T$ が存在して $x = (1+\varepsilon)y_\varepsilon$．ここで $y_\varepsilon = (1+\varepsilon)^{-1}x$ は E において x に収束する (TVS におけるスカラー乗法の連続性)．したがって x は T の閉包に属するが，T は閉集合だから，T に属する．逆に $x \in T$ なら明らかに $p(x) \leqslant 1$．これで T が p の閉単位球であることが証明された．

残るところは，セミノルム p の唯一性である．他のセミノルム p' でその閉単位球が丁度 T になるものがあったとする．これは $p(x) \leqslant 1$ と $p'(x) \leqslant 1$ が同値であることを意味している．これらの不等式に，$y \in E$, $\varepsilon > 0$ を任意として

$$x = y/(p(y)+\varepsilon), \qquad x = y/(p'(y)+\varepsilon)$$

を相継いで代入して見れば，不等式

$$p'(y) \leqslant p(y)+\varepsilon, \qquad p(y) \leqslant p'(y)+\varepsilon$$

を得る．ε は任意だったから，これらから $p(y) = p'(y)$.

系． E を局所凸空間とすれば，E の連続なセミノルムの閉単位球の [セミノルムを種々変えたときの] 全体は原点の基本近傍系をなす．

これは命題 7.5 と命題 7.2 から明らか．

定義 7.7. E を局所凸空間とする．E の連続なセミノルムの一つの集合 $\mathcal{P}$ が E 上の**連続セミノルムの基底** (basis of continuous seminorms on E) であるとは，E 上の任意の連続セミノルム p に対して $\mathcal{P}$ に属するセミノルム q と定数 $C > 0$ が存在して，すべての $x \in E$ に対し

(7.6)　$$p(x) \leqslant Cq(x)$$

となることをいう.

セミノルム p, q の閉単位球をそれぞれ U_p, U_q とすれば (7.6) は

(7.7) $$C^{-1}U_q \subseteq U_p$$

を意味する.

次の命題の証明は読者にまかせる.

命題 7.6. E を局所凸空間とする. $\mathcal{P}$ を E 上の連続セミノルムの一つの基底とすれば, $p \in \mathcal{P}$ の閉単位球を U_p と書くとき, 集合 λU_p $(p \in \mathcal{P}, \lambda > 0)$ の全体は原点の基本近傍系を成す. 逆に, $\mathcal{B}$ を樽近傍から成る集合族であって, 集合 λU $(U \in \mathcal{B}, \lambda > 0)$ の全体が原点の基本近傍系を成すとすれば, その閉単位球が $\mathcal{B}$ に属す樽であるようなセミノルムの全体は, E 上の連続セミノルムの一つの基底となる.

局所凸空間 E において, 連続セミノルムの基底のことを E の位相を定義するセミノルムの集合というのが普通である. (あるいは, E の TVS 構造を定義するセミノルムの集合という.) たとえば, 空間 $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^1)$ (例 3) において, セミノルム $p_{[a,b]}$ の全体は実数直線上の連続関数の各有界区間上の一様収束の位相を定義する.

セミノルムの族 $\{p_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ は, それが連続セミノルムの基底でない場合でも, E の位相を定義するセミノルムの族といわれる場合がある. それは, 次の二条件をみたすときである:

(1) 各 p_α は連続セミノルムである;

(2) 有限個の p_α の上限 [これも連続セミノルムになる] の全体からなる集合が E 上の連続セミノルムの基底をなす.

丁寧に書くならば, セミノルム

$$x \mapsto p_{(B)}(x) = \sup_{\alpha \in B} p_\alpha(x)$$

を考える. ここで B は添字の集合 A のすべての有限集合を動くとする. この

$p_{(B)}$ の集合が基底となるとするのである．有限個のセミノルムの上限をとるのは，それらの閉単位球の共通部分を考え，この共通部分の**ゲージ** (gauge) をとるのと同値である．（セミノルム p がある集合 U の‘ゲージ’であるとは，U が p の閉単位球に一致することをいう．）

次の事実は明らかである．

命題 7.7. E, F を局所凸空間，$f: E \mapsto F$ を線形写像とする．f が連続であるための必要十分条件は，F の任意の連続セミノルム q に対して E の連続セミノルム p が存在して，すべての $x \in E$ に対し

$$q(f(x)) \leqslant p(x)$$

が成り立つことである．

系. 局所凸空間 E 上の線形形式 f が連続であるための必要十分条件は，E の連続セミノルム p が存在して，すべての $x \in E$ に対し

$$|f(x)| \leqslant p(x)$$

が成り立つことである．

命題 7.7 とその系は，次の形で使われることが多い：$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ をそれぞれ E, F 上の連続セミノルムの基底とする．このとき，写像 f が連続であるための必要十分条件は，任意の $g \in \mathcal{L}$ に対して $p \in \mathcal{P}$ と定数 $C > 0$ が存在して，すべての $x \in E$ に対し

$$g(f(x)) \leqslant Cp(x)$$

が成立することである．

たとえば，E, F 共にその位相が唯一つの（連続）セミノルムで定義されている場合には，それらのセミノルムをどちらも $\| \ \|$ で表わせば，線形写像 $f: E \to F$ が連続であるための必要十分条件は，定数 $C > 0$ が存在して，すべての $x \in E$ に対し

$$\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$$

が成り立つことである．（記号$\| \ \|$は通例セミノルムがノルムのときに使用されるが，ここでは別に重要なことではない．）同様に，E上の線形形式fが連続であるための必要十分条件は，定数$C>0$があって，すべての$x\in E$に対し

$$|f(x)|\leqslant C\|x\|$$

となることである．

もちろん，$\mathbf{C}^1$における絶対値は$\mathbf{C}^1$の（普通の）位相に関する連続セミノルムであり，それだけで$\mathbf{C}^1$の連続セミノルムの基底をなしている，換言すれば，$\mathbf{C}^1$の位相を定義している．$\mathbf{C}^n$上のユークリッド（あるいはエルミート）ノルムは$\mathbf{C}^n$の位相を定義している．（実ベクトル空間$\mathbf{R}^n$でも同様．）

命題 7.8. Eを局所凸空間，$\mathcal{P}$をその連続セミノルムの基底とする．E上のフィルター$\mathcal{F}$が一点xに収束するための必要十分条件は，任意の$\varepsilon>0$と任意の$p\in\mathcal{P}$に対して$M\in\mathcal{F}$が存在して，すべての$y\in M$に対し

$$p(x-y)<\varepsilon$$

となることである．

系． Eの点列$\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$が一点xに収束するための必要十分条件は，任意の$\varepsilon>0$と任意の$p\in\mathcal{P}$に対して整数$n(p,\varepsilon)$が存在して，$n\geqslant n(p,\varepsilon)$ならば

$$p(x-x_n)<\varepsilon$$

となることである．

これらは共に明白である．

命題 7.9. Eを局所凸空間，Mをその部分ベクトル空間とし，ϕをEからE/Mへの標準写像とする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) 商 TVS, E/Mの位相は局所凸である．

(2) $\mathcal{P}$をEの連続セミノルムの基底とするとき，各$p\in\mathcal{P}$に対して，E/M

上のセミノルム $\dot{p}$ を

$$E/M \ni \dot{x} \mapsto \dot{p}(\dot{x}) = \inf_{\phi(x)=\dot{x}} p(x) \tag{7.8}$$

により定義すると，このようにして得られる $\dot{p}$ の全体 $\mathcal{P}$ は E/M 上の連続セミノルムの基底をなす.

証明は定まりきった検証をするだけである. (7.8) で定義された $\dot{p}$ がセミノルムになることは，p の劣加法性と ϕ の線形性から出る. (7.8) の意味を明らかにするために，E として複素2次元空間 $\mathbf{C}^2$ を考えてみよう. 部分空間 M としては

$$M = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2 ; \zeta_1 = 0\}$$

をとる.

商空間 E/M は

$$M^0 = \{(\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_2 = 0\}$$

と同一視できる. このとき標準写像 $E \to E/M$ は射影

$$(\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (\zeta_1, 0)$$

になる. $\mathbf{C}^2, M^0$ の位相はそれぞれのユークーリッド・ノルムで定義される. $\mathbf{C}^2$ のユークリッド・ノルムを p と書けば,

$$\dot{p}(\zeta_1, 0) = \inf_{\zeta_2 \in \mathbf{C}^1} p(\zeta_1, \zeta_2) = \inf_{\zeta_2 \in \mathbf{C}} (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^{1/2}$$
$$= |\zeta_1|$$

すなわち $\dot{p}$ は期待されるように M^0 上のユークリッド・ノルムになる.

注意しなければならないのは，“E の位相を定義する連続セミノルムの族が，基底を成していない場合には，公式 (7.8) によって得られる E/M 上のセミノルムの族が E/M の位相を定義するとは限らない” ことである. 反例として，$E = \mathbf{C}^2, M = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 ; z_1 = z_2\}$ の場合，E 上のセミノルムの族を，$p_1 : z = (z_1, z_2) \mapsto |z_1|$ と $p_2 ; z \mapsto |z_2|$ の二つのセミノルムから成るとする. この二つのセミノルムからなる族は明らかに $\mathbf{C}^2$ の普通の位相を定義する. しかし

$$\dot{p}_i(\dot{z}) = \inf_{\dot{z}=z+M} p_i(z)$$

は $i = 1, 2$ に対して，$\dot{z} \in E/M$ が何であっても共に0になる. 実際，どの同

値類 $z+M$ も二つの部分空間 $z_1=0$ および $z_2=0$ の両方と交わるからである.

一般論にもどろう. E 上のセミノルム p の核 (kernel) とは, $p(x)=0$ となるようなすべての x の集合のことをいう. これを $\mathrm{Ker}\,p$ で表わす. p の劣加法性と正斉次性からただちに, $\mathrm{Ker}\,p$ は E の部分ベクトル空間になることがわかる. p が連続であれば, E から $\mathbf{R}$ への連続写像による一点 $\{0\}$ の逆像として, $\mathrm{Ker}\,p$ は閉集合である. 局所凸空間 E においては, 原点だけからなる集合の閉包は, p がすべての連続セミノルムの集合を動いたときの $\mathrm{Ker}\,p$ の共通部分

$$\bigcap_p \mathrm{Ker}\,p$$

に一致する. これは容易に見られる. 次の命題も同様である.

命題 7.10. 局所凸空間 E において, $\{0\}$ の閉包は, p が連続セミノルムの一つの基底を動いたときの (閉) 部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}\,p$ の共通部分に等しい.

E に付随した Hausdorff 空間 (命題 4.5 につづく注意参照) は局所凸であるが (命題 7.9), それは上に述べたことから商空間

$$E/(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{Ker}\,p)$$

に等しい. ここで $\mathcal{P}$ は一つの連続セミノルム基底である.

特に, E が唯一つのセミノルム p_0 からなる連続セミノルム基底をもつならば, E に付随する Hausdorff 空間は $E/\mathrm{Ker}\,p_0$ であり, その位相はセミノルム $\dot{x}\mapsto \dot{p}_0(\dot{x})=p_0(x)$ で定義される (ただし x は $\phi(x)=\dot{x}$ となるもの). 実際セミノルム p_0 は各部分集合 $x+\mathrm{Ker}\,p_0$ 上で一定である. なぜなら, $x-y\in\mathrm{Ker}\,p_0$ とすると (三角不等式によって)

$$|p_0(x)-p_0(y)|\leqslant p_0(x-y)=0$$

となるからである.

したがって, 一つのセミノルムが, それだけで局所凸空間の位相を定義していて, その空間が Hausdorff であるならば, そのセミノルムは明らかにノルムでなければならない. したがって $\dot{p}_0$ はノルムである. このようなとき, $E/\mathrm{Ker}\,p_0$ は, E **に付随したノルム空間** (normed space associated with E) という.

次の結果は後に用いる．

命題 7.11. E を局所凸 Hausdorff TVS とし，K をそのプレコンパクト部分集合とする．このとき K の凸包 $\Gamma(K)$ はプレコンパクトになる．

証 明 これは命題6.9を繰返し適用して得られる．V を原点の任意の近傍とし，U を原点の平衡的凸近傍で $U+U\subseteq V$ なるものとする．K はプレコンパクトだから，K の有限個の点 $x_1,\dots,x_r$ が存在して

$$K\subseteq(U+x_1)\cup\cdots\cup(U+x_r).$$

いま，S をこの有限個の点 $x_1,\dots,x_r$ の凸包とすると，$\Gamma(K)\subseteq S+U$ [右辺は凸だから]．この S は E の一つの有限次元部分空間 M に含まれることに注意する [M としては $x_1,\dots,x_r$ で生成されるものをとればよい]．E から M に導かれる位相は Hausdorff だから，第9章 (定理 9.1) に見るように，普通の位相と一致する．このとき S は M の有界閉集合になるから[1]，Borel-Lebesgue の定理によって，S はコンパクトである．S がコンパクトだから，命題6.9を再び適用すると，S の有限個の点 $y_1,\cdots,y_s$ が存在して

$$S\subseteq(y_1+U)\cup\cdots\cup(y_s+U).$$

$\Gamma(K)\subseteq S+U$ だったから，上式から

$$\begin{aligned}\Gamma(K)&\subseteq(y_1+U+U)\cup\cdots\cup(y_s+U+U)\\&\subseteq(y_1+V)\cup\cdots\cup(y_s+V).\end{aligned}$$

V は任意だったから，命題6.9の (b) ⇒ (a) を用いれば $\Gamma(K)$ はプレコンパクトである．

系. E がさらに完備であれば，コンパクト集合の閉凸包は常にコンパクトである．

コンパクト集合の凸包は，コンパクトとは限らない．閉集合にすらならないこともある．

---

1) 有限次元 Hausdorff TVS は，$\mathbf{C}^n$ (または $\mathbf{R}^n$) に TVS として同形．このとき S が有界，閉なることは見やすい．

もしEが完備でなければ，コンパクト集合の閉凸包もコンパクトになるとは限らない．

演 習 問 題

7.1. 局所凸空間E上のセミノルムgが連続であるための必要十分条件は，連続なセミノルムpが存在して$g(x) \leqslant p(x), (x \in E)$となることであることを証明せよ．

7.2. 局所凸空間の任意の族の積 TVS はまた局所凸であることを証明せよ．

7.3. 局所凸空間Eが少なくとも一つ連続なノルムを持てば，ノルムだけからなる連続セミノルム基底をもつことを示せ．

7.4. Eを局所凸空間，$\mathcal{P}$を必ずしも有限個とは限らぬ連続セミノルムの族とする．任意の$x \in E$に対し

$$p_0(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} p(x)$$

は有限と仮定する．このときp_0はセミノルムになることを証明せよ．またp_0の閉単位球はEの閉集合，すなわち樽になることを示せ．

7.5. pを$0 < p < 1$なる数とするとき，関数

$$\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mapsto |\zeta|_p = (|\zeta_1|^p + \cdots + |\zeta_n|^p)^{1/p}$$

は，$\mathbf{C}^n$上のセミノルムではないことを示せ．

7.6. 任意の$\zeta \in \mathbf{C}^n$に対し

$$\lim_{p \to \infty} |\zeta|_p = |\zeta|_\infty$$

となることを証明せよ．(74 頁参照)．

7.7. $\mathbf{C}[[X]]$を一変数Xの複素係数形式的巾級数の空間とする．$\mathbf{C}[[X]]$の係数の単純収束の位相に関する連続セミノルム基底を一つ構成せよ．

7.8. ベクトル空間Eの部分集合Aに対し，その**平衡凸包** (convex balanced hull) をAを含む最小の平衡凸集合として定義する．

(a) Aの平衡凸包は，Aの平衡包 (Aを含む最小の平衡集合) の凸包に等しいことを示せ．

(b) Aの平衡凸包が，Aの凸包の平衡包とは異なるようなAの例をあたえよ．

7.9. 区間$\{t; 0 \leqslant t \leqslant 1\}$上で定義されたすべての複素数値連続関数の空間を$F$とする．$F$から複素平面$\mathbf{C}$へのあらゆる写像の空間を$E$とする．いま，任意の固定した$t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$に対して，$F$から$\mathbf{C}$への写像$\delta_t : f \mapsto f(t)$を考える（したがって$\delta_t$は$E$の元）．また$dt : f \mapsto \int_0^1 f(s)\,ds$を考える（これも$E$の元）．空間$E$に局所凸な位相を；

S が F のすべての有限部分集合を動くときの，セミノルム

$$\mu \mapsto \sup_{f \in S} |\mu(f)|$$

の集合（これは基底になる）によって定義される位相として定義する．

(a)　t が区間 $0 \leqslant t \leqslant 1$ を動くとき，元 δ_t のなす集合は E のコンパクト集合であることを証明せよ．（ヒント：E を積空間

$$\mathbf{C}^F = \prod_{f \in F} \mathbf{C}_f, \quad (\mathbf{C}_f \text{ は } \mathbf{C} \text{ のコピー})$$

と同一視して考えよ．このとき E の位相は $\mathbf{C}^F$ 上の積位相と一致することを証明して，Tychonov の定理（演習問題 6.1，定理 6.1）を用いよ）．

(b)　写像 dt はすべての δ_t のなす集合の閉凸包に属すが，凸包には属さないことを証明せよ．（ヒント：区間 $[0,1]$ 上の積分を Riemann 和で近似せよ）．

7.10.　平面 $\mathbf{R}^2$ の閉集合であって，その凸包が閉集合にならない例をあたえよ．

8.

距離付け可能な位相ベクトル空間

TVS E が**距離付け可能** (metrizable) であるとは，E が Hausdorff であり，かつ E の原点が近傍の可算基底をもつことをいう．この‘距離付け可能’という名称の由来は，次の事実にある (この事実はここに述べるような一般な形では証明しないことにする).

“TVS E の位相が一つの距離によって定義できるための必要十分条件は，E が Hausdorff でありかつ原点が近傍の可算基底をもつことである”.

まず，距離の定義を思い出そう，d が E 上の一つの**距離** (metric, distance) であるとは，d は $E \times E$ から非負実数の半直線 $\mathbf{R}_+$ への写像 $(x, y) \mapsto d(x, y)$ であって，次の性質をもつことをいう．

(1) $x = y$ のときそのときに限り $d(x, y) = 0$

(距離が 0 の二点は一致する)；

(2) すべての $x, y \in E$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$

(距離は対称な関数)；

(3) すべての $x, y, z \in E$ に対し $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

(三角不等式).

E の位相が距離 d によって定義されるという意味は，すべての $x \in E$ について，集合

$$B_\rho(x) = \{y \in E ; d(x, y) \leqslant \rho\}, \qquad \rho > 0$$

が x の基本近傍系をなすことである．距離 d が**平行移動によって不変** (translation invariant) とは，次の条件が成り立つことをいう．

(4)　すべての $x, y, z \in E$ に対して

$$d(x, y) = d(x+z, y+z).$$

性質 (4) をいい換えれば，すべての $x \in E$ とすべての $\rho > 0$ について

$$B_\rho(x) = B_\rho(0)+x$$

となる．あるいは，任意の二点 $x, y \in E$ について

$$d(x, y) = d(x-y, 0)$$

といってもよい．

次の事実が証明できる：“E を距離付け可能な TVS とすれば，平行移動によって不変な距離が存在して，E の位相はその距離によって定義される．”

ベクトル空間 E 上のノルムは E 上の距離を定義することに注意する．それは，そのノルムを $\| \quad \|$ で表わしたとき，距離を単に $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ と定義するだけである．しかし，後に見るように，任意の距離付け可能な空間の位相が，常に一つのノルムによって定義されるのではない．

命題 8.1. E を距離付け可能な局所凸 TVS とする．$\{p_1, p_2, \ldots\}$ をセミノルムの非減少列であって，E の連続セミノルム [可算] 基底とする．$\{a_1, a_2, \ldots\}$ を正数列であって

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j < +\infty$$

なるものとする．
このとき，$E \times E$ 上の関数

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j p_j(x-y)/[1+p_j(x-y)]$$

は，平行移動によって不変な距離であって E の位相を定義する．

証　明　最初に次のことに注意しよう．E が距離付け可能な局所凸 TVS とすれば，E には，連続セミノルムの可算基底 $\{p_n\}$ で非減少なものが存在する．この意味は，$n = 1, 2, \ldots$ とすべての $x \in E$ について

$$p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$$

ということである．

実際，距離付け可能性から，0の近傍の可算基底，$U_1, U_2, \ldots$ が存在する．E は局所凸だから，各 U_n は樽近傍を含むから，はじめから U_n 自身が樽であるとしてよい．そこで，新しく0の基本近傍系 $\{V_n\}$ を

$$V_1 = U_1,\ V_2 = U_1 \cap U_2, \ldots,\ V_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n, \ldots$$

によって定義する．各 V_n は樽であり，$V_{n+1} \subseteq V_n$ となっている．そこで，V_n をその閉単位球とするセミノルムを p_n とする．[p_n の存在は命題7.5による，すなわち p_n は V_n のゲージとして定義する.] このようにして E 上の連続セミノルムの可算基底で，$p_n \leqslant p_{n+1}$ なるものが得られた．さらに E は Hausdorff だから，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} p_n = 0$$

である．これからただちに，$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときそのときに限ることがわかる．$d(x, y) = d(y, x)$ は明白．したがって検証すべきは，三角不等式：

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in E$$

である．それには，次の不等式が証明されればよい．

$$p_j(u+v)/[1+p_j(u+v)] < p_j(u)/[1+p_j(u)] + p_j(v)/[1+p_j/(v)]'$$

そうすれば，$u = x-y, v = y-z$ として，容易に三角不等式が出る．さて，劣加法性から

$$p_j(u+v) \leqslant p_j(u) + p_j(v)$$

だから，証明すべきことは，三つの負でない実数 a, b, c が不等式

$$c \leqslant a+b \tag{8.1}$$

をみたすならば，

$$c/(1+c) \leqslant a/(1+a) + b/(1+b) \tag{8.2}$$

をみたすことである．もし，c または $a+b$ のうちどちらかが0であれば，何も証明することはない．したがって，どちらも0でないと仮定する．このとき (8.1) は

$$(a+b)^{-1} \leqslant 1/c$$

と同値である．ゆえに

$$(1+1/c)^{-1} \leqslant (1+1/(a+b))^{-1} = a/(1+a+b)+b/(1+a+b).$$

この左辺は $c/(1+c)$ に等しく，右辺はたかだか

$$a/(1+a)+b/(1+b)$$

に等しいから (8.2) が証明された．これで d が実際に距離であることがわかった．この距離が平行移動によって不変なことは，その定義の式を見れば明らか，残るところは，d で定義される位相がもとの E の位相と一致することの証明である．E のもとの位相はセミノルムの集合 $\{p_n\}$ によって定義されている．まず各集合

$$B_\rho(x) = \{y \in E\,;\, d(x,y) < \rho\}, \qquad \rho > 0$$

が，ある $x+\lambda V_n$ の形の集合を含むことを示さねばならない，ここで $\lambda > 0$, V_n は，p_n の閉単位球である．逆に各集合 $x+V_n$ が，適当な ρ に対して $B_\rho(x)$ を含むことを示さねばならない．しかし，d は平行移動によって不変だから，もちろん $x=0$ と仮定して構わない．

正項級数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ は収束するから，整数 $j(\rho) \geqslant 1$ が存在して

$$\sum_{j=j(\rho)+1}^{\infty} a_j < \rho/2 \tag{8.3}$$

となる．列 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ は非減少だから

$$\sum_{j=1}^{j(\rho)} a_j p_j(x)/(1+p_j(x)) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right) p_{j(\rho)}(x). \tag{8.4}$$

そこで，級数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ の和を A とすれば，x が集合

$$(\rho/2A)V_{j(\rho)} = \{y \in E\,;\, p_{j(\rho)}(y) \leqslant \rho/2A\}$$

に属していれば，

$$d(x,0) = \sum_{j=1}^{j(\rho)} a_j p_j(x)/(1+p_j(x)) + \sum_{j=j(\rho)+1}^{\infty} a_j p_j(x)/(1+p_j(x)) < \rho$$

となる ((8.3) と (8.4) から)．これは $(\rho/2A)V_{j(\rho)} \subseteq B_\rho(0)$ を示す．

逆の方の証明をするのに，各 a_j が >0 であることを用いる．実際このとき，

$$p_j(x) \leqslant a_j^{-1} d(x,0)(1+p_j(x)), \qquad j=1,2,\ldots,\ x \in E.$$

したがって

$$d(x, 0) < a_j/2$$

とすれば

$$p_j(x) < 1$$

を得る．換言すれば

$$B_{a_j/2}(0) \subseteq V_j$$

これで命題 8.1 は完全に証明された．

演 習 問 題

$d(x, y)$ を命題 8.1 で定義された E 上の距離とする．

8.1. すべての $x, y \in E$ に対して

$$d(x+y, 0) \leqslant d(x, 0)+d(y, 0)$$

なることを示せ．この不等式は，任意の平行移動によって不変な距離について正しいか？

8.2. 非負値関数 $x \mapsto d(x, 0)$ はセミノルムではないことを証明せよ．

さて，話を距離付け可能であるが，局所凸とは限らない一般の TVS にもどそう．距離空間においてよく知られた三つの結果を証明する．

命題 8.2. 距離付け可能な空間 E の部分集合 K が完備であるためには，K における任意の Cauchy 列が K の点に収束することが必要十分である．

換言すれば，距離付け可能な空間においては，**列完備** (sequentially complete) ならば**完備**になる．

証 明 完備な集合において Cauchy 列は収束列になることは既知である．証明すべきことは，E が 0 の近傍の可算基底 $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ を持ち，K が列完備であるとき，K 上の任意の Cauchy フィルター $\mathscr{F}$ が K で収束するということである．$\mathscr{F}$ は Cauchy フィルターだから，任意の n に対して $M_n \in \mathscr{F}$ が存在して，$M_n - M_n \subseteq U_n$．ところで，集合 $M_n (n=1, 2, \ldots)$ の有限個の共通部分は決して空集合にはならない，なぜならフィルター $\mathscr{F}$ に属するから．そこで各 n について $M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$ から一点を選んで，それを x_n とする．点

列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ が Cauchy 列になることは明らか．したがって，この点列は K の一点 x に収束する．実は，フィルター $\mathscr{F}$ がこの点 x に収束することを示そう．n を任意の整数 $\geqq 1$ とし，k を $U_k+U_k \subseteq U_n$ なるようにとる．さらに整数 h を $h \geqq k$ で $x_h \in U_k+x$ なるように選ぶ．$x_h \in M_k$ となるから

$$M_k \subseteq U_k+x_h \subseteq U_k+U_k+x \subseteq U_n+x$$

これは $\mathscr{F}$ が x に収束することを示す．(証終)

命題 8.3. 距離付け可能な完備 TVS E は **Baire 空間** (Baire space) である．すなわち次の性質をもつ．

(B)　内点をもたない閉集合の可算個の合併集合は，内点をもたない．

注意 1. 可算個の閉集合の合併は，一般には閉集合にならない．

2. 内点をもたない閉集合の可算個の合併の閉包は，たとえ E が Baire 空間であっても内点を持ち得る．たとえば，E として実数直線 $\mathbf{R}$ に普通の位相を入れたものを考える，各点は閉集合である．有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は可算個の内点をもたない閉集合 (有理数の一つ一つ) の合併である．$\mathbf{Q}$ は内点をもたないが，その閉包は実数直線全体である．

3. 補集合に移れば，性質 (B) は次の同値な形に述べられる．

(B′)　いたるところ稠密な開集合の可算個の共通部分はいたるところ稠密な集合である．

実際，内点をもたぬ閉集合の補集合はいたるところ稠密な開集合であるからよい．

4. Baire 空間でないような完備 TVS が存在する．いわゆる LF-空間は，そのような TVS の例になっている．[1]

5. Baire 空間であって距離付け可能でないもの，距離付け可能だが Baire 空間でないもの (このときはもちろん完備でない) が存在する．距離付け可能であるが，完備でない Baire 空間も存在する．

---

1)　LF-空間については 13 章参照

命題8.3の証明 距離付け可能な完備空間では，性質(B′)が成り立つことを証明しよう．$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$ を E の稠密な開集合の列とする．この共通部分を A で表わす，$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} \Omega_l$．証明すべきことは，$A$ が稠密なこと，すなわち E のすべての空でない開集合と交わることである．Ω を E の任意の空でない開集合として，$A \cap \Omega \neq \emptyset$ をいう．$U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$ を E の 0 の近傍の可算基底とする．U_k はすべて閉集合と仮定してもよい．まず $\Omega \cap \Omega_1$ は空ではない開集合だから，$x_1 + U_{k_1}$ の形の集合を含む．$x_1 + U_{k_1}$ の内部を G_1 とする．$G_1 \cap \Omega_2$ は空でないから $x_2 + U_{k_2}$ の形の集合を含む．$x_2 + U_{k_2}$ の内部を G_2 とする．このようにして進むと，順次に開集合の列 $G_1, G_2, \ldots, G_l$ を得る．このとき $\bar{G}_l \subseteq \Omega \cap \Omega_l$ である．さらに，$G_{l+1} \subseteq G_l$ かつ $G_l \subseteq x_l + U_{k_l}$ である．これから $G_l - G_l \subseteq U_{k_l} - U_{k_l}$．また $k_l \geqslant l$ だったから $G_1, G_2, \ldots, G_l, \ldots$ は一つの Cauchy フィルターの基底をなす．この極限を x とすれば，すべての l について $x \in \bar{G}_l$，したがって

$$x \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \bar{G}_l \subseteq \Omega \cap \bigcap_{l=1}^{\infty} \Omega_l = A \cap \Omega \qquad \text{(証終)}.$$

次に述べるのは，距離付け可能な空間におけるコンパクト性に関するよく知られた判定条件である．一般の場合には，集合 K がコンパクトであるための条件は，K 上の任意のフィルターが集積点をもつことであった(命題6.4)．すでに証明したプレコンパクト性の判定条件(命題6.9)を用いると，次の命題を得る．

命題 8.4. 距離付け可能な TVS E の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は，K の任意の点列が K で集積点をもつことである．

証 明 必要性は距離付け可能性の仮定がなくても明らか，(命題6.8系3)．十分性を証明しよう．プレコンパクト集合の一般的性質(定義6.2)から，K が完備かつプレコンパクトなることをいえばよい．完備なことは，命題7.8と，Cauchy 列が集積点をもてばその点に収束するという事実から出る．プレコンパクト性に関しては，もし K 上の任意の点列が集積点をもてば，命題6.9の

条件(b)がみたされることを示せばよい．いま命題6.9の条件(b)がみたされなかったと仮定してみる．すると，0の近傍Vが存在して，$x+V, x \in K$の形の集合によるKの有限被覆が存在しないということになる．そこで，まず一点$x_1 \in K$をとる．x_1+VはKを覆わないから$x_2 \in K, x_2 \notin x_1+V$が存在する．$K \nsubseteq (x_1+V) \cup (x_2+V)$だから，$x_3 \in K, x_3 \notin (x_1+V) \cup (x_2+V)$が存在する等々．このようにして，帰納法により，点列$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$を得る．ここで，任意の相異なる$m, n$に対して$x_n - x_m \notin V$である．点列$\{x_n\}$が集積点を持ち得ないことは明らか[1]．（証終）．

距離付け可能な空間のもう一つの有用な性質は，連続性と**列的連続性**(sequential continuity)の同値なことである．

定義 8.1. 位相空間Eから位相空間Fへの写像fが**列的に連続**(sequentially continuous)であるとは，Eの任意の点xに収束する任意の点列$\{x_n\}$に対して，点列$\{f(x_n)\}$が$f(x)$に収束することをいう．

命題 8.5. 距離付け可能なTVSEから(距離付け可能とは限らぬ)TVSFへの(線形とは限らぬ)写像fが連続であるための必要十分条件は，fが列的に連続なことである．

証　明　fが連続であれば列的に連続なことは明らか．Eが距離付け可能なTVSであるとき，$f: E \to F$が連続でなければ，列的にも連続でないことを示そう．fが連続でなければ，Eの一点x^0とFにおける$f(x^0)$の近傍Vが存在して$f^{-1}(V)$はEにおけるx^0の近傍ではない．$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$を$E$の0の近傍の可算基底とする．このとき，任意の$n=1,2,\dots$に対して，$x_n \in U_n+x^0$であって$x_n \notin f^{-1}(V)$となる$x_n$が存在する．なぜなら，もし存在しなければ$U_n+x_0 \subseteq f^{-1}(V)$となって，$f^{-1}(V)$が$x^0$の近傍になるからである．

1) もし集積点があったとして，それをxとする．0の近傍Uを$U+U \subseteq V, -U=U$なるようにとる．$x+U$は$\{x_n\}$の点を無限に含むが，そのうちの二つをx_n, x_mとすれば$x_n - x_m \in U-U=U+U \subseteq V$．これは矛盾．

$f(x_n) \notin V$ がすべての n について成り立つから，点列 $\{f(x_n)\}$ は $f(x^0)$ に収束しない．ところが，点列 $\{x_n\}$ は x^0 に収束する．したがって f は列的連続ではない．（証終）

演 習 問 題

d を TVS E の位相を定義する距離とする．一点 x から部分集合 A への距離を

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

と定義する．

8.3. $d(x, A) = 0$ なるための必要十分条件は，x が A の閉包に属することである．これを証明せよ．

8.4. N を E の閉部分ベクトル空間とし，ϕ を E から E/N の上への標準写像とする．$(E/N) \times (E/N)$ 上の関数

$$\dot{d}(\dot{x}, \dot{y}) = \inf_{\phi(x)=\dot{x}} d(x, \phi^{-1}(\dot{y}))$$

は E/N 上の一つの距離であることを示せ．

8.5. 定理 5.1 と演習問題 5.1 を用いて，E 上の距離 d は E の完備化 $\widehat{E}$ 上の距離 $\hat{d}$ に延長できることを証明せよ．

8.6. 演習問題 8.4 の記号を用いる．写像 ϕ の標準的延長（定理 5.1）を $\hat{\phi} : \widehat{E} \to \widehat{(E/N)}$ とし，$\widehat{N}$ を $\widehat{E}$ における N の閉包とする．

$\hat{\phi}(\hat{x}) = 0$ なるためには $\hat{d}(\hat{x}, \widehat{N}) = 0$ が必要十分であることを証明せよ．このことから，$\widehat{E}/\widehat{N}$ から $\widehat{(E/N)}$ の上への標準的同形写像が存在することを示し，この同形写像は，$\hat{d}$ から構成した**商距離** (quotient metric)（演習問題 8.4）を E/N 上の商距離 $\dot{d}$（演習問題 8.4）の延長（演習問題 8.5）に変換することを導け．

8.7. 次の命題とその系を証明せよ．

命題 8.6. 距離付け可能な TVS E の一点 x が点列 S の集積点であるための必要十分条件は，S の適当な部分列が x に収束することである．

系. 距離付け可能な TVS E の部分集合 K がコンパクトであるための必要十分条件は，K 上の任意の点列が収束部分列を含むことである．

9.

有限次元 Hausdorff 位相ベクトル空間，有限余次元部分ベクトル空間，超平面

E を複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間とする．このとき，次の二条件は同値である．

(a) E は有限次元；

(b) ある整数 $n \geqslant 0$ に対して，E から $\mathbf{C}^n$ の上への一対一の線形写像が存在する．

実際，(a) の意味は，整数 $n' \geqslant 0$ が存在して，E の $n'+1$ 個の任意のベクトルは一次独立にはなり得ないということである．(b) における n は，そのような整数 n' の最小のものである．このとき，E には丁度 n 個のベクトルで一次独立なものが存在する．そのような任意の n 個の元から成る集合は E を生成する，すなわち E の基底となる．

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ を E の一つの基底とすれば，任意のベクトル $x \in E$ は

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$$

と書ける．ここで x の **'成分'** (components) x_j は一意的に定まった複素数である．もっと正確にいえば，写像 $x \mapsto (x^1, \cdots, x^n)$ は，E から $\mathbf{C}^n$ の上への（ベクトル空間の）同形写像である．このとき n を E の**次元** (dimension) といい，$\dim E$ と書く．E が有限次元でないとき，E は**無限次元** (infinite dimensional) という．

ここで証明しようというのは，もし有限次元 TVS E が Hausdorff ならば，その構造は普通のものであること，すなわち E から $\mathbf{C}^{\dim E}$ の上への (TVS 構造の) 同形写像が存在することである．この同形写像は，実は上に述べた写像

$x \mapsto (x^1, \cdots, x^n)$ になる．

定理 9.1. E を有限次元 Hausdorff TVS とする．このとき次のことが成り立つ．

(a) E は TVS として $\mathbf{C}^d$ に同形である．ここで $d = \dim E$. もっと正確にいえば，$(e_1, \cdots, e_d)$ を E の任意の基底とするとき，写像

$$\mathbf{C}^d \ni (x^1, \cdots, x^d) \mapsto x^1 e_1 + \cdots x^d e_d \tag{9.1}$$

は，TVS 構造に関する $\mathbf{C}^d$ から E の上への同形写像である．

(b) E 上のすべての線形汎関数は連続である．

(c) E から任意の TVS F への線形写像は連続である．

証　明　まず，(9.1) は常に連続なことに注意しよう．実際，もしすべての '座標' x^j が 0 に収束すれば，各ベクトル $x^j e_j$ は 0 に収束し，したがってその和も 0 に収束する (スカラー乗法およびベクトル加法の連続性)．したがって，証明すべきことは (9.1) の逆写像の連続性である．

第一段階として，このことを一次元，すなわち $d=1$ の場合に証明しよう．θ を任意の数 >0 とし，V を E の 0 の平衡的な近傍で θe_1 を含まないものとしよう．このような V の存在は，E が Hausdorff だからよい．x を V の任意のベクトルとすると，ある複素数 ξ に対して $x = \xi e_1$ と書ける．ここで，もし $|\xi| \geqslant \theta$ とすると，V の平衡的なことと $|\theta/\xi| \leqslant 1$ より

$$(\theta/\xi)x = \theta e_1 \in V$$

となり，V の選び方に反する．ゆえに，すべての $x \in V$ について ($x = \xi e_1$ ならば)，$|\xi| \leqslant \theta$ を得る．これは正に，線形汎関数 $x = \xi e_1 \mapsto \xi$ の連続性を意味している．すなわち，(9.1) の両連続性が $d=1$ の場合に証明された．

性質 (b) は，いまや $d=1$ のときは明白である．実際，f を一次元空間 E 上の線形形式として，$x_0 \in E$ を $f(x_0)=1$ なるように選ぶ．これは f が恒等的に 0 ではないとき可能である．$f \equiv 0$ なら何も証明することはない．さて，x_0 をこのように選べば，E の任意のベクトルは $x = \xi x_0$ の形に書ける．$x \mapsto \xi$

の連続性は既知であり，$\xi = f(x)$ だから f は連続．

次の段階は，性質 (b) を次元 $d > 1$ のときに証明することである．(a), (b) ともに，$(d-1)$ 次元以下のときには証明されていると仮定する．$\dim E = d$ として，f を恒等的には 0 でない E 上の線形汎関数とする．$x_0 \in E$ を $f(x_0) = 1$ となるように定める．すると，任意の $x \in E$ について，$x - f(x)x_0$ は $\operatorname{Ker} f$ に入る．ゆえに ϕ を E から $E/\operatorname{Ker} f$ の上への標準写像とすると，$\phi(x) = f(x) \times \phi(x_0)$．換言すれば，$\phi(x_0)$ は $E/\operatorname{Ker} f$ を張る．これは $E/\operatorname{Ker} f$ が一次元であることを示す．したがって，$\operatorname{Ker} f$ の次元は $< d$（実際には $(d-1)$ 次元）となる．ところで (a) は次元が $< d$ なら成り立つと仮定したから，$\operatorname{Ker} f$ はある $\mathbf{C}^n$ に同形であり，特に完備，したがって Hausdorff TVS E の中で閉である．これから，$E/\operatorname{Ker} f$ は Hausdorff になる（命題 4.5）．さて，次の可換図式を考えよう．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbf{C}^1 \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \bar{f}} & \\ E/\operatorname{Ker} f & & \end{array}$$

写像 $\bar{f}$ は一次元 Hausdorff TVS $E/\operatorname{Ker} f$ 上の線形汎関数だから連続である．標準写像 ϕ は常に連続だから，$f = \bar{f} \circ \phi$ も連続である．

かくして，性質 (b) が d 次元の場合に証明された．これからただちに性質 (a) が d 次元の場合に証明できる．実際，写像 (9.1) の連続性は既知である．逆に，x が E で 0 に収束すれば，その各成分 x^j は $\mathbf{C}^1$ で 0 に収束する．なぜなら，各成分 x^j は E 上の線形汎関数だからである．したがって $(x^1, \cdots, x^d) \to 0$ ($\mathbf{C}^d$ で)，すなわち (9.1) の逆写像の連続性が証明された．

性質 (c) は性質 (b) からただちに従う．実際 $e_1, \cdots, e_d$ を E の一つの基底とすると，E から TVS F への線形写像 u は，$b_j = u(e_j)$, $j = 1, \cdots, d$ と置くとき，

$$x = \sum_{j=1}^{d} x^j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{d} x^j b_j$$

となる．汎関数 $x \mapsto x^j$ が連続だから，u も連続である．（証終）

系 1. 有限次元 Hausdorff TVS はすべて完備である．

実際，次元が $d<+\infty$ の Hausdorff TVS E は $\mathbf{C}^d$ の一つの‘コピー’である．

系 2. Hausdorff TVS の有限次元ベクトル空間はすべて閉である．

これは，命題 5.3 の系 1 からよい．

演習問題 9.1. 有限次元 Hausdorff TVS 上のセミノルムはすべて連続であることを示せ．

Heine-Borel-Lebesgue の定理によれば，$\mathbf{C}^d$ の有界開集合の閉包はコンパクトである．したがって有限次元 Hausdorff TVS の原点，したがって各点はコンパクト集合からなる基本近傍系をもつ．このような性質をもつ位相空間は，**局所コンパクト** (locally compact) とよばれる (このとき，もちろん Hausdorff である)．局所コンパクト空間は注目すべき性質を持っている．局所コンパクト群は実り多い研究の対象であり，フーリエ変換の一般理論の確固たる基盤である．同様に局所コンパクト TVS も目ざましい性質を持っているだろうか？ たしかにその通りではあるが，それは新しいものではない．なぜなら，次の **F. Riesz の定理**があるからである．

定理 9.2. 局所コンパクト TVS は有限次元である．

証　明　E を局所コンパクト TVS とする．K を E の 0 のコンパクトな近傍とする．K は 0 の平衡的閉集合を含み，コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトだから，はじめから K は平衡的と仮定してよい．K はコンパクトで，$\frac{1}{2}K$ は 0 の近傍だから，K の有限個の点 $x_1,\cdots,x_r$ が存在して

$$K\subseteq\left(x_1+\frac{1}{2}K\right)\cup\ldots\cup\left(x_r+\frac{1}{2}K\right)$$

となる．M を $x_1,\ldots,x_r$ で張られる部分ベクトル空間としよう．$\dim M$ は有限，

したがって M は E の閉集合．ゆえに，商空間 E/M は Hausdorff である．ϕ を E から E/M の上への標準写像とする．$K\subseteq M+\frac{1}{2}K$ だから，$\phi(K)\subseteq\frac{1}{2}\phi(K)$，すなわち $2\phi(K)\subseteq\phi(K)$．これを繰り返せば

$$\phi(2^nK)\subseteq\phi(K)$$

ところで，K は平衡的だから，$E=\bigcup_{n=0}^{\infty}2^nK$．したがって $\phi(E)=E/M\subseteq\phi(K)$．$\phi$ は連続で，E/M は Hausdorff だから $\phi(K)$ はコンパクトである（命題 4.5）．かくして，E/M はコンパクトな Hausdorff TVS になる．そのようなものは 0 次元，すなわち一点 0 だけになる．なぜなら，もし $\dot{e}\in E/M, \dot{e}\neq 0$ が存在すれば，$\{\dot{e}\}$ で張られる一次元部分空間は閉であり，したがってコンパクトになるはずだが，それはスカラー体 **C**（または **R**）に等しいから（定理 9.1），コンパクトにはなり得ない！したがって $E/M=\{0\}$，すなわち $E=M$ は有限次元．

さて，今度は，TVS E の部分ベクトル空間で，**有限余次元** (finite codimension) のものを考察する．ベクトル空間 E の部分ベクトル空間 M の**余次元** (codimension) とは，商空間 E/M の次元のことである．

定義 9.1. 余次元が 1 の部分ベクトル空間を**超平面** (hyperplane) という．

E をベクトル空間，M をその部分ベクトル空間であって余次元 $n<+\infty$ なるものとする．$\phi: E\to E/M$ を標準写像とし，$b_1,\ldots,b_n$ を商空間 E/M の一つの基底とする．これを**持上げ** (lift) ることによって[1]，E の n 個の一次独立なベクトル $e_1,\ldots,e_n$ を得る．N を $e_1,\cdots,e_n$ で張られる E の部分ベクトル空間とすれば，

$$E=M\oplus N \tag{9.2}$$

となる．記号 $\oplus$ は**直和** (direct sum) を表わす．(9.2) の意味は，E の任意のベクトル x が $x=y+z$，$y\in M$，$z\in N$ と分解され，かつ，この分解が一意的であること，換言すれば M と N の共通部分が原点だけからなるということで

1) ここでは単に，$b_1,\ldots,b_n$ の ϕ による逆像の中から一点ずつ取ることをいっている．

ある. (9.2) が実際正しいことを示そう. もし $x=\sum x^i e_i \in N$ が M にも属するとすれば,

$$0=\phi(x)=\sum x^i b_i.$$

これは [$b_1,\ldots,b_n$ の一次独立性から] すべての x^i が 0 になるときのみ成り立つ. したがって,

$$M\cap N=\{0\}.$$

さて, $x\in E$ を任意にとると, 適当な $x^1,\ldots,x^n$ に対して

$$\phi(x)=\sum x^i b_i.$$

ゆえに

$$\phi(x-\sum x^i e_i)=0, \quad \text{すなわち} \quad x-\sum x^i e_i\in M.$$

これから

$$E\subseteq M+N \text{ (ベクトル加法)}$$ (証終)

上に述べたことから, H が E の超平面の場合には,

$$E=H\oplus N \tag{9.3}$$

と書けて, N は次元 1, すなわち '**直線**' (line) になる. (複素ベクトル空間のときには, N は複素平面 **C** のコピーだから, '平面' というべきかも知れないが, 一般に一次元部分ベクトル空間のことを '直線' ということになっている.)

もちろん (9.2) から, E/M は N に同形になる (同形はベクトル空間としての同形である ; 位相は定義されていない). このように, E が部分ベクトル空間 M と有限次元部分ベクトル空間の直和ならば, M は余次元有限であり, その余次元は N の次元に等しい. とくに (9.3) で $\dim N=1$ ならば H は超平面である.

命題 9.1. ベクトル空間 E の超平面 H は, E の真の極大部分ベクトル空間である.

自明. (H が '真の' (proper) 部分空間とは, $H\neq E$ を意味する.)

命題 9.2. TVS E の超平面 H は，いたるところ稠密であるか，または閉である．

実際，H の閉包 $\bar{H}$ は E の部分ベクトル空間（部分ベクトル空間の閉包はまた部分ベクトル空間）だから，命題9.1によって $\bar{H}=E$ または $\bar{H}=H$ である．

命題 9.3. E を TVS，M を E の閉部分ベクトル空間で余次元有限のものとする．このとき E から M の上への [TVS の] 準同形写像 p であって $p^2=p$ なるものが存在する．また $E=M\oplus \mathrm{Ker}\,p$ となる．

ベクトル空間 E からそれ自身への線形写像 p であって $p^2=p$，すなわちすべての $x\in E$ に対して $p(p(x))=p(x)$ となるものを**射影** (projection) という．ただちにわかるように，有限次元ベクトル空間における普通の射影はこの範疇にはいる．上の命題の陳述で重要な部分は，p が準同形であることで，それは p が連続かつ開 (continuous and open) の意味である．

命題9.3の(証). $b_1,\dots,b_n$ を E/M の基底とする．M が閉だから E/M は Hausdorff．E のベクトル $e_1,\dots,e_n$ を $\phi(e_j)=b_j$，$j=1,\dots,n$ なるように選ぶ (ϕ は E から E/M への標準写像)．N を $e_1,\dots,e_n$ で張られる E の部分空間とし，E/M から N の上への写像を

$$\phi(x)=\sum \xi^j b_j \mapsto \sum \xi^j e_j \in N \tag{9.4.}$$

により定義する．この写像が連続であることは既知 (定理9.1(c))．この写像が開であることは，逆写像が連続だからよい．この逆写像は，ϕ の N への制限である．e_j $(j=1,\dots,n)$ は一次独立になるから，写像 (9.4) は E/M から N の上への同形写像である．ϕ に (9.4) を結合して得られる写像 [まず ϕ を施し，ついで (9.4) を施す] を q で表わそう．q は E から N の上への準同形写像になる．このとき

$$p=I-q,\quad (I\text{ は }E\text{ の恒等写像})$$

は E からそれ自身への写像であって，E から M の上への準同形写像になり，

$p^2=p$ をみたす (検証は読者にまかせる). これより $N=\mathrm{Ker}\,p$ となり，命題 9.3 が得られる.

演　習　問　題

9.2. Eをベクトル空間とし，pをEからそれ自身への線形写像で $p^2=p$ なるものとする. IをEの恒等写像とすれば，$I-p$ も射影，すなわち $(I-p)^2=I-p$ となることを示せ. また

$$E=\mathrm{Ker}\,p\oplus\mathrm{Ker}\,(I-p)=\mathrm{Im}\,p\oplus\mathrm{Im}\,(I-p)$$

となることを示せ. ($\oplus$ は代数的直和を示す.)

9.3. Eを Hausdorff TVS，pをEの連続な射影とする. Eは開写像であることを証明せよ.

注意 1. Eを TVS，Mをその部分ベクトル空間とする. たとえMが閉であるとしても，一般には，EからMの上への連続な射影は存在しない.

2. Eを TVS とし，A, B をその閉部分ベクトル空間とする. EはA, Bの代数的直和になると仮定する：$E=A+B$，$A\cap B=\{0\}$. これを $E=A\oplus B$ で示す. このとき，一般には，EからAの上への連続な射影pは存在しない. EがAとBの**位相的直和** (topological direct sum) であるというのは，写像

$$(x, y)\mapsto x+y$$

が $A\times B$ からEへの，一対一，上への写像であって両連続なときである. ベクトル加法の連続性から，もし x, y がそれぞれ A, B で (Eから導かれた位相に関して) 0 に収束するならば，$x+y$ も 0 に収束する. 自明でないのはその逆，すなわち，$x+y$ が 0 に収束すれば，x, y 共に 0 に収束するという部分である. Eを Hausdorff として，Eが二つの部分空間 A, B の位相的直和になるならば，A, B は自動的にEで閉になる. このとき，E/A は，いうまでもなくBに (TVS 構造について) 同形になる.

演 習 問 題

9.4. 次の命題を証明せよ．

命題 9.4. Eをベクトル空間，fをE上の恒等的には0でない線形汎関数とする．このとき $\mathrm{Ker}\,f$ はEの超平面となる．

逆に，Eの任意の超平面Hに対し，E上の線形汎関数fが存在して $H=\mathrm{Ker}\,f$ となる．もし，E上の他の線形汎関数gに対しても $H=\mathrm{Ker}\,g$ となるとすれば，適当なスカラーにλを用いて $g=\lambda f$ と書ける．

Eを Hausdorff TVS，HをEの超平面，fをHを核とする線形汎関数とする．このとき，次の条件は同値である．

(a)　Hは閉．

(b)　fは連続．

9.5. Eを Hausdorff TVS，A^*をEの代数的双対E^*の部分集合であって，すべての $x\in E, x\neq 0$ に対して $a^*\in A^*$ が存在して $\langle a^*, x\rangle\neq 0$ なるものとする．もし，有限個の元 $a_1{}^*,\dots,a_r{}^*\in A^*$ が存在して，r 個の超平面

$$\{x\in E; \langle a_j{}^*, x\rangle=0\},\qquad j=1,\dots,r$$

の共通部分が $\{0\}$ になるならば，$\dim E\leqslant r$ となることを証明せよ．

9.6. Eをノルム空間（そのノルムを$\|\ \|$と書く）とする．Eの単位球面をSとする：$S=\{x\in E; \|x\|=1\}$．E'をEの双対，すなわちE上の連続線形汎関数全体のなすベクトル空間とする．次の事実を承認することにしよう．（それは後に証明する Hahn-Banach の定理の結果である．定理17.1参照）：任意の $x\in E, x\neq 0$ に対して $x'\in E$ が存在して $\langle x', x\rangle\neq 0$．

いま，HがEのすべての閉超平面を動くとき，あらゆる $S\cap H$ の共通部分は空集合になることを示せ．この事実から，Eが局所コンパクトならば，それは有限次元になることを導け（演習問題9.5を用いよ）．

10.

Fréchet 空間, 例

Fréchet 空間 (Fréchet space), (または短かく ***F*-空間** (*F*-space)) とは, 次の三つの性質をもつ TVS のことである.

(a) 距離付け可能 (したがって, とくに Hausdorff);

(b) 完備 (ゆえに命題 8.3 により Baire 空間);

(c) 局所凸 (ゆえに命題 8.1 に述べた距離をもつ).

定義よりただちに,

"*F*-空間の閉部分空間はすべて (誘導位相に関し) *F*-空間."

"二つの *F*-空間の積は *F*-空間."

"*F*-空間の閉部分空間による商空間は *F*-空間" (命題 7.9 と演習問題 8.6). 有限次元 Hausdorff TVS (9 章参照), Hilbert 空間, Banach 空間 (後述) は *F*-空間である. 解析学において重要だが Banach 空間の範疇にはいらないような *F*-空間の幾つかの例を考察しよう.

例 I.
$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の $\mathcal{C}^k$ 関数の空間

これから用いる記号の説明をしよう. $\mathbf{R}^n$ の変数は, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ などと書く. 変数 x_j についての一階偏微分は $\partial/\partial x_j$, $j=1,\ldots,n$ と書く. 微分の回数を示す添字として, 非負整数 $p_1,\ldots,p_n$ を成分とするベクトル $p=(p_1,\ldots,p_n)$ を用いる. これは今後 ***n*-系** (*n*-tuple) とよぶことにする. そう

して

$$(\partial/\partial x)^p = (\partial/\partial x_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial x_n)^{p_n}$$

と置く．$|p|$ によって n-系 p の **'長さ'** (length) を示す．すなわち

$$|p| = p_1+\cdots+p_n$$

と置く．(この長さは 74 頁で $|p|_1$ と書いた.) 長さ $|p|$ は微分作用素 $(\partial/\partial x)^p$ の**階数** (order) に等しい．

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された，変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ の複素数値関数 $\phi(x)$ を考察する．Ω は一つ固定して考える．k は非負整数として，Ω で定義された複素関数 f が $\mathcal{C}^k$ **関数** ($\mathcal{C}^k$ function) であるとは，f が連続であり，$k\geqslant 1$ のとき，f の階数 $\leqslant k$ のすべての導関数が (Ω の各点で) 存在して Ω 上の連続関数になることをいう．f はまた **k 回連続的微分可能な関数** (k-times differentiable function) ともよばれる．$k\geqslant 1$ のとき $\mathcal{C}^k$ 関数はすべて $\mathcal{C}^{k-1}$ 関数である．Ω 上の関数 f が $\mathcal{C}^\infty$ 関数であるとは，f がすべての $k=0,1,2,\dots$ に対して $\mathcal{C}^k$ 関数になることをいう．$\mathcal{C}^\infty$ 関数はまた**無限回微分可能な関数** (infinitely differentiable function) ともいう．Ω 上の $\mathcal{C}^k$ 関数の全体は，複素数体上の一つのベクトル空間になる．これを $\mathcal{C}^k(\Omega)$ で表す．$(0\leqslant k\leqslant +\infty)$ $\mathcal{C}^k(\Omega)$ に位相空間の構造を入れて，これを F-空間にしよう．それは局所凸空間にするのだから，連続セミノルム基底を定義すればよい(定義 7.7)．セミノルムとしては，次のものをとる：

$$|f|_{m,K} = \sup_{|p|\leqslant m}(\sup_{x\in K}|(\partial/\partial x)^p f(x)|).$$

ここで m, K の意味を説明しなければならない．まず K は Ω の任意のコンパクト集合である ($\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合とは，$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合である；Ω のコンパクト集合とは，$\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合であって Ω に含まれるものであった)．連続関数はコンパクト集合上では常に有界であることに注意しよう．かくして，f が $\mathcal{C}^k$ 関数なら，$m\leqslant k$ のとき，$|f|_{m,K}$ は有限な値になる．そこで，k が有限なら $m=k$ とし；k が無限なら，m はすべての正整数を動くとする．

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ には，セミノルム (の族)

$$f\mapsto |f|_{m,K}$$

によって定義される位相を入れる．この位相はしばしば $\mathcal{E}^k$ 位相または，関数およびその階数 $\leqslant k$ の導函数の各コンパクト集合上の一様収束の位相とよばれる．($k=\infty$ のときには階数 $\leqslant k$ のを省く)．この後者のよび方はセミノルム（の族）$|\ \ |_{m,K}$ による収束の様子をよく表わしている．$\mathcal{E}^k$ 位相によって $\mathcal{E}^k(\Omega)$ は局所凸空間になる．(この LC–空間[1] は明らかに Hausdorff である．なぜなら，Ω のすべてのコンパクト集合について $|f|_{0,K}=0$ ならば，特に $|f|_{0,\{x\}}=|f(x)|=0$ がすべての $x\in\Omega$ について成り立つから.) 次に示すべきことは，このようにして定義された $\mathcal{E}^k(\Omega)$ 上の位相が距離付け可能なこと，つまり連続セミノルムの可算基底をもつことである．これを示すために，まず $m'\geqslant m$, $K'\supseteq K$ ならば

$$|f|_{m',K'}\geqslant|f|_{m,K}$$

となることに注意しよう．このことから，Ω のコンパクト集合の列 $K_1,K_2,\ldots,K_r,\ldots$ であって，Ω の任意のコンパクト集合 K はある整数 j について $K\subseteq K_j$ となるようなもの［集合列］の存在を示せば十分である．なぜならこのとき

$$|f|_{m,K}\leqslant|f|_{m,K_j}$$

がすべての $\mathcal{E}^m$ 関数 f について成り立つからである．このとき，$\{|\ \ |_{m,K}\}$ は $\mathcal{E}^k(\Omega)$ で連続セミノルム基底となるから ($k<+\infty$ なら $m=k$；$k=+\infty$ なら $m=1,2,\ldots$)，$\{|\ \ |_{m,K_j}\}$ も基底であり，これは可算個から成る．

補題 10.1. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．このとき，Ω のコンパクト集合列 $K_1,K_2,\ldots,K_r,\ldots$ であって，次の二つの性質をもつものが存在する．

(a) 各 $j=1,2,\ldots$ に対して，K_j は K_{j+1} の内部に含まれる．

(b) 集合列 K_j の合併は Ω に等しい．

証明 $\Omega=\mathbf{R}^n$ のときには

$$K_j=B_j=\{x\in\mathbf{R}^n\,;\ |x|\leqslant j\}$$

と置けばよい．ここで $|x|$ は $\mathbf{R}^n$ 上のユークリッド・ノルム．$\Omega\neq\mathbf{R}^n$ のときは，

1) LC は局所凸 (locally convex) の略．

まず A_j を Ω の点であって Ω の境界からの距離が $\geqslant 1/j$ となるもの全体の集合とする．

A_j は閉集合であり A_{j+1} の内部に含まれる．しかし一般には A_j は有界でなく，したがってコンパクトではない．$K_j = A_j \cap B_j$ と置く．このとき K_j は求める性質をすべてもっていることは容易にわかる．

かくして $\mathcal{E}^k(\Omega)$ は距離付け可能である．それが完備であることを示そう．それには列的に完備なことをいえばよい (命題 8.2)．$f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ を $\mathcal{E}^k(\Omega)$ の Cauchy 列とする．関数列 f_j が一つの関数 $f \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ に収束することを示すために次の三つの事実を利用する．

(10.1)　複素平面 $\mathbf{C}$ は完備である．

(10.2)　A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする．A 上の連続関数列 $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ が A 上の一つの関数 g に一様収束するならば，g も A で連続になる．

(10.3)　A を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．A 上の $\mathcal{E}^1$ 関数列 $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ が A 上の一つの関数 g に一様収束し，その一階導関数 $\partial g_\nu/\partial x_j$（これは A 上の連続関数）も一つの A 上の関数 $g^{(j)}$ に一様収束するとする ($j = 1, \ldots, n$)．このとき

$$g^{(j)} = \partial g/\partial x_j$$

がすべての j について成立する．特に g は $\mathcal{E}^1$ である．

読者は (10.1) を知っていると仮定する（このとき完備は列的完備と同値!)．(10.2), (10.3) も既知に違いあるまいが，念のためその証明を急いで復習して見よう．

(10.2) の証明． x_0 を A の任意の点とする．証明すべきことは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\eta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \eta$　$(x \in A)$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となることである．ここで '3ε の論法' (three-epsilon argument) を用いる[1]．

(10.4)　$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

一様収束性から，n を十分大きくすると<u>すべての</u> $y \in A$ について $|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$．このように n を選んだら，それを固定する．そして f_n の連続性を用いると，$\delta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta$ ならば $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$．上述の点 y は任

1)　特に名前をつけるまでもない常用の論法であるが，評価すべき式を三つの部分に分解することによるのだろう．

意だから，集合

$$\{x \in A\,;\,|x-x_0|<\delta\}$$

のどの点でもよい．これらを全て考慮すれば，(10.4) から

$$|x-x_0|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon$$

を得る[1]．

(10.3) の証明． 証明は一変数 $x=x_1$ として行なう．n 変数への拡張は全く自動的だから読者にまかせる．さて，A は一つの区間として差支えない．その区間から任意に一点を選んで，それを a とする．このとき

$$g_\nu(x)-g_\nu(a)=\int_a^x g_\nu'(t)dt. \tag{10.5}$$

ここで g_ν' は g_ν の一階導関数である．積分は通例の解釈に従う．すなわち $x<a$ ならば

$$g_\nu(x)-g_\nu(a)=-\int_x^a g_\nu'(t)dt.$$

とするわけである．いずれにしても，g_ν' は A 上で一様に $g^{(1)}$ に収束するから，$\int_a^x g_\nu'(t)dt$ は $\int_a^x g^{(1)}(t)dt$ に収束する ((10.2) によって $g^{(1)}$ は連続関数)．したがって，(10.5) から

$$g(x)-g(a)=\int_a^x g^{(1)}(t)dt$$

を得る．これは $g^{(1)}$ が g の導関数であることを示している．

さて $\mathcal{E}^k(\Omega)$ の完備性にもどろう．$\mathcal{E}^k(\Omega)$ の位相の定義から，各 $x\in\Omega$ について $f_\nu(x)$ は複素平面での Cauchy 列をなす．実際，任意の整数 $m\leqslant k$ と任意のコンパクト集合 $K\subseteq\Omega$ について，任意の $\varepsilon>0$ に対して $N(\varepsilon)$ が存在して

$$\nu,\mu\geqslant N(\varepsilon) \quad \text{ならば} \quad |f_\nu-f_\mu|_{m,K}<\varepsilon$$

となるから，特に $m=0$，$K=\{x\}$ とおけばよい．さて (10.1) から複素数列 $f_\nu(x)$ は極限をもつ．それを $f(x)$ と書こう．$x\mapsto f(x)$ は明らかに Ω 上の一つの関数であるが，ただちにわかるように $f_\nu(x)$ は $f(x)$ に，Ω の各コンパクト集合

1) 最後は 3ε になったが，これは差支えない．$\varepsilon>0$ が任意だから 3ε も任意の正数である．

上で一様に収束する．これらのコンパクト集合をΩの各点の近傍になるものにとれば，(10.2)によって，fはΩ上の連続関数であることがわかる．$k=0$の場合には，これで証明は完了する．$k>0$のときには，f_νは$\mathscr{C}^k(\Omega)$のCauchy列だから，その一階偏導関数

$$\partial f_\nu/\partial x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

は，各jについて$\mathscr{C}^{k-1}(\Omega)$のCauchy列となる．$k<+\infty$のとき$k$に関する帰納法を用いれば，各$j$について$\partial f_\nu/\partial x_j$が$\mathscr{C}^{k-1}$関数に収束するとしてよく，それは(10.3)によってfのx_jによる偏導関数となる．$k=+\infty$ならば，上に述べたことから，任意の整数$h \geqslant 0$についてf_νは$f \in \mathscr{C}^k(\Omega)$に$\mathscr{C}^h$位相で収束する．これが，丁度$f_\nu$が$f$に$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$において収束することを意味する．

この最後に述べたことは，$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$の位相が丁度$\mathscr{C}^k(\Omega)$から誘導された位相の**上極限**[1] (superior limit)になっている事実と関係する．すなわち，$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$の部分集合$U$が$\mathscr{C}^\infty$位相に関する0の近傍になっているための必要十分条件は，ある有限のkについてUが$\mathscr{C}^k(\Omega)$から誘導された位相に関して(換言すれば$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$上の$\mathscr{C}^k$位相に関して) 0の近傍になっていることである．[kはもちろんUによって異なる.]

例 II.
$\mathbf{C}^n$の開集合Ω上の正則関数の空間

Ωを$\mathbf{C}^n$の開集合とする．$\mathbf{C}^n$の変数は$z=(z_1,\dots,z_n)$と書く．各$j=1,\dots,n$について$z_j=x_j+iy_j$．ここでx_j, y_jは実数，$i=(-1)^{1/2}$である．$H(\Omega)$をΩ上の**正則関数** (holomorphic function)全体の成すベクトル空間とする．hをΩ上の$\mathscr{C}^1$関数とする．($\mathscr{C}^1$関数の意味は，

$$z=(z_1,\dots,z_n) \mapsto (x,y)=(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$$

---

1) 位相の族の上極限の定義を述べて，それに当てはめて考えるのではない．単にその直後に述べることを意味するだけである．それなら**上限** (supremum)といった方がよい．しかし，これは後に述べる**射影極限**の一例になっている．

なる写像によって $\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{R}^{2n}$ と同一視して考えたとき例 I の意味で $\mathcal{C}^1$ 関数ということである．このとき Ω は $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合となり，$\mathcal{C}^1$ 関数とは，h が x_j および y_j に関する一階連続導関数をもつことである.) h が Ω で正則とは，それが Cauchy–Riemann の方程式

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}+i\frac{\partial h}{\partial y_j}=0, \qquad j=1,2,\ldots,n$$

を Ω で (すなわち Ω のすべての点で) みたすことをいう．この定義から，h は単に $\mathcal{C}^1$ ではなくて無限回微分可能になることを思い出そう．さて

$$(\partial/\partial z)^p=(\partial/\partial z_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial z_n)^{p_n}, \qquad p=(p_1,\ldots,p_n)$$

と置く，ここで $\partial/\partial z_j$ は

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

によって定義されたものである．ここで Cauchy の公式を思い出そう．z^0 を Ω の点とする，$z^0=(z_1{}^0,\ldots,z_n{}^0)$．$z^0$ を中心とする**多重円板** (polydisk)

$$D(r_1,\ldots r_n)=\{z\in\mathbf{C}^n\,;\,|z_j-z_j{}^0|\leqslant r_j,\, j=1,\ldots,n\}$$

を考える．これは Ω に含まれると仮定する．h が Ω で正則とすれば，各 $p=(p_1,\ldots,p_n)$ について

$$\frac{1}{p!}(\partial/\partial z)^p h(z^0)=\oint_{z_1-z_1{}^0=r_1}\cdots\oint_{|z_n-z_n{}^0|=r_n}\frac{(2i\pi)^{-n}h(z)\,dz_1\cdots dz_n}{(z_1-z_1{}^0)^{p_1+1}\cdots(z_n-z_n{}^0)^{p_n+1}}$$

が成り立つ．各積分は (複素平面上の) 普通の複素積分を表わす．Cauchy の公式からただちに出ることは，正則関数列が Ω の各コンパクト集合上で一様収束するならばその各階の導関数もすべて各コンパクト集合上で一様収束することである．h が Ω で正則ならば，Cauchy–Riemann の方程式から

$$\left.\begin{aligned}\partial h/\partial z_j&=\partial h/\partial x_j\\ \partial h/\partial z_j&=-i\partial h/\partial y_j\end{aligned}\right.\qquad (1\leqslant j\leqslant n)$$

が成り立つ．

$H(\Omega)$ は任意の $\mathcal{C}^k(\Omega)$ の部分空間と見なすことができる．実際 $H(\Omega)$ の元はすべて $\mathcal{C}^\infty$ だから．さて，どの $\mathcal{C}^k(\Omega)$ から誘導した位相も $H(\Omega)$ 上では一致す

ることを見よう．そのためには一番粗いものと一番細かいもの，つまり $\mathcal{C}^0$ 位相と $\mathcal{C}^\infty$ 位相について見ればよい．これは正則関数については，関数列が Ω の各コンパクト集合上で一様収束するならば，その各階導関数もすべて Ω のコンパクト集合上で一様収束するということである．［これが Cauchy の公式からでることはすでに述べた.］

$H(\Omega)$ にこの位相を入れる．すなわち，$H(\Omega)$ は $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の部分ベクトル空間にその誘導位相を入れたものである．$H(\Omega)$ は明らかに $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の閉部分空間になる．実際正則関数の列が $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ において（$\mathcal{C}^1(\Omega)$ においてといっても同じこと）一つの関数 f に収束するならば，f はいうまでもなく Ω 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数になり，Cauchy-Riemann の方程式をみたす．実際，その一階導関数は，正則関数列の一階導関数の極限であり，後者は Cauchy-Riemann 方程式をみたしているからである．F-空間の閉部分空間だから，$H(\Omega)$ も F-空間になる．

例 III.
n 変数の形式的巾級数の空間

$\mathbf{C}[[X_1,\dots X_n]]$ または，短かく書いて $\mathbf{C}[[X]]$ により，n 変数 $X_1,\dots,X_n$ の複素係数形式的巾級数のなすベクトル空間を表わす．その元は

$$u=\sum u_pX^p \tag{10.6}$$

ここで和はすべてのベクトル $p=(p_1,\dots,p_n)$ にわたる．p の各成分 p_j は非負整数である．（このようなベクトルの全体を今後 $\mathbf{N}^n$ で表す.）係数 u_p は複素数，X^p は単項式

$$X_1^{p_1}\cdots X_n^{p_n}$$

を表わす．級数 (10.6) の収束性については何も仮定しない．すなわち，u を n 個の添字 $p_1,\dots,p_n$ をもつ数列 $\{u_p\}$ と見たとき，何も条件をつけないのである．

$\mathbf{C}[[X]]$ に，次のセミノルムの族によって位相を入れる．

$$|u|_m=\sup_{|p|\leq m}|u_p|,\qquad m=0,1,\dots.$$

この位相は $n=1$ のときにはすでに考察した (3 章 33 頁). 任意の n についても，この位相は係数の単純収束の位相とよばれる．この位相により $\mathbf{C}[[X]]$ は距離付け可能な局所凸空間になる．その完備性の証明 (単に (10.1) だけから出る) は読者にまかせよう．かくして $\mathbf{C}[[X]]$ は F-空間になる．

n-系 $p=(p_1,\dots,p_n)$ の全体 $\mathbf{N}^n$ に離散位相を入れよう．$\mathbf{N}^n$ の一点の基本近傍系として，その点自身だけからなる集合をとればよい．$\mathbf{N}^n$ のコンパクト集合とは有限集合のことになる (実際，各点が開かつ閉になるから，任意の部分集合に対して，その各点からなる族が開被覆になる)[1]. 形式的巾級数 u は $\mathbf{N}^n$ 上の関数と考えることができる．すなわち，各点 $p\in\mathbf{N}^n$ に p 番目の係数 u_p を対応させる関数である．離散空間では，すべての関数は連続になる．したがって，$\mathbf{C}[[X]]$ は $\mathbf{N}^n$ 上のすべての関数の空間，またはすべての連続関数の空間になる．このとき，係数の単純収束の位相は，$\mathbf{N}^n$ 上の各点収束の位相に他ならない．また $\mathbf{N}^n$ の各コンパクト集合上の一様収束 (!) の位相ということもできる．

例 IV.
無限遠で急速に減少する $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{S}$

この最後の例は，**超関数** (distribution) の理論における Fourier 変換の関連で重要な空間である．それは，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 全体で定義された $\mathcal{C}^\infty$ 関数からなる一つのベクトル空間である [すなわち $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の一つの部分空間]. その関数空間を $\mathcal{S}$ で表わす：その元は $\mathbf{R}^n$ で定義され無限回可微分関数である上に，その無限遠における**増大度** (growth) (あるいはむしろ**減少度** (decrease)) を調整する付加条件として，そのすべての導関数が無限遠において $1/|x|$ のあらゆる巾よりも速く 0 に収束することを要求する．ここで $|x|$ はユークリッド・ノルム

$$|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$$

である．

1) 一点 x と，その点だけからなる集合 $\{x\}$ とは異なる概念であるが，しばしば同一視する．

すなわち，f を $\mathcal{S}$ の任意の元とするとき，すべての n-系 $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbf{N}^n$ とすべての整数 $k\geqslant 0$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^k|(\partial/\partial x)^p f(x)|=0$$

となる.

$\mathcal{S}$ の位相は，セミノルムの族

$$|f|_{m,k}=\sup_{|p|<m}(\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\{(1+|x|)^k|(\partial/\partial x)^p f(x)|\})$$

$m,k=0,1,2,\ldots$ によって定義する.

もちろん $\mathcal{S}$ は距離付け可能である．$\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の部分ベクトル空間であるが，その位相は $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ から誘導したものよりも真に細かい．関数列 $f_\nu\in\mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ において 0 に収束するための必要十分条件は，関数列

$$(1+|x|)^k(\partial/\partial x)^p f_\nu(x)$$

が，任意の [固定した] $k=0,1,\ldots$ と任意の $p\in\mathbf{N}^n$ に対して，$\mathbf{R}^n$ 全体で一様に 0 に収束することである．とくに，任意の $p\in\mathbf{N}^n$ に対し，導関数

$$(\partial/\partial x)^p f_\nu$$

が $\mathbf{R}^n$ で一様に 0 に収束する．このことからただちに，f_ν は $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ で 0 に収束する．このことから $\mathcal{S}$ の完備性が容易に証明できる．実際 $\mathcal{S}$ における Cauchy 列 $\{f_\nu\}$ は，もちろん $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の Cauchy 列になり，したがって一つの $\mathcal{C}^\infty$ 関数 f に ($\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ において)[1] 収束する．k,m を任意にとる．このとき定数 $M_{m,k}$ が存在して，すべての ν について

$$|f_\nu|_{m,k}\leqslant M_{m,K} \tag{10.7}$$

となる．(この事実は後に一般化して “TVS における Cauchy 列は有界集合である” となる．この一般的命題の証明は，実は，これから述べる証明を二重に用いたものである.) 実際，(m と k によって定まる) 整数 N が存在して，すべての $\nu\geqslant N$ に対して

$$|f_\nu-f_N|_{m,k}\leqslant 1$$

となる．これは $\{f_\nu\}$ が Cauchy 列だから明らか．ゆえに，すべての ν に対して

---

1) ‘$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ の位相に関して’ の意味．この表現は今後も用いる.

$$|f_\nu|_{m,k} \leqslant 1 + \sup_{\mu=1,\ldots,N} |f_\mu|_{m,k}$$

これが証明すべきことであった［この右辺を $M_{m,k}$ とせよ］．ところで(10.7)は次のように書き直せる．すべての $x \in \mathbf{R}^n$ について

$$\sup_{|p|<m} |(\partial/\partial x)^p f_\nu(x)| \leqslant M_{m,k}(1+|x|)^{-k}.$$

ところが，各導関数 $(\partial/\partial x)^p f_\nu(x)$ は $\mathbf{R}^n$ で一様に（したがって各点で）f の対応する導関数 $(\partial/\partial x)^p f$ に収束するのだったから，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ について

$$\sup_{|p|\leq m} |(\partial/\partial x)^p f(x)| \leqslant M_{m,k}(1+|x|)^{-k}.$$

これは f が $\mathscr{S}$ に属すことを示している（いままでは，単に $\mathscr{C}^\infty$ 関数であることしかわかっていなかった）．最後に，f_ν は（単に $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ で f に収束するだけでなく）$\mathscr{S}$ において f に収束することを証明しなければならない．そのために $\{f_\nu\}$ を $\{f_\nu - f\}$ で置き換えて見る．$\{f_\nu - f\}$ もたしかに $\mathscr{S}$ における Cauchy 列になる．そしてその［$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ における］極限関数は 0 である．したがって次の事実を証明することに帰着する．

(10.8)　$\mathscr{S}$ における Cauchy 列が $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ で 0 に収束するならば，$\mathscr{S}$ においても 0 に収束する．

この(10.8)を証明することは良い演習問題として読者にまかせる．

かくして，$\mathscr{S}$ は完備である．したがって Fréchet 空間になる．$\mathscr{S}$ の元はしばしば**無限遠で急速に減少する $\mathscr{C}^\infty$ 関数**（$\mathscr{C}^\infty$ functions rapidly decreasing at infinity）と呼ばれる（これで各階の導関数も無限遠で急速に減少することを暗示する!）．［もっと短かく，**急減少 $\mathscr{C}^\infty$ 関数**ともいう．］$\mathscr{S}$ と書いて誤解のおそれがあるときには $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ と書く．

演 習 問 題

10.1. $\{E_n\}(n=1,2,\ldots)$ を Fréchet 空間の列とする．このとき，積 TVS $E=\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ も Fréchet 空間になることを証明せよ．

10.2. K を $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合とする．$\mathscr{C}_c^\infty(K)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の無限回可微分な複素関数

であって，その台[1] (support) が K に含まれるもの全体のなすベクトル空間とする．$\mathscr{E}_c^\infty(K)$ 上の位相を，0 の基本近傍系は

$$\mathscr{V}(m,\varepsilon)=\{\phi\in\mathscr{E}_c^\infty(K)\,;\ \sup_K\sum_{|p|\leq m}|(\partial/\partial x)^p\phi(x)|\leqslant\varepsilon\}$$

$m=1,2,\ldots,\varepsilon>0$ がすべての可能な仕方で動いたときに得られる集合族であるとして定義する．

$\mathscr{E}_c^\infty(K)$ は Fréchet 空間になることを証明せよ．

10.3. 演習問題 3.5 の空間 $E=\mathscr{F}_c(\mathbf{N}\,;\,\mathbf{C})$ の双対 E' を考える．（演習問題 3.6 の）$\mathscr{F}_c(n)$ の部分集合 B_n を次の条件をみたす f 全体として定義する．

$$|f(0)|^2+\cdots+|f(n)|^2\leqslant 1.$$

そして，すべての $n=0,1,\ldots$ とすべての $\varepsilon>0$ に対し

$$\mathscr{V}(n,\varepsilon)=\{f'\in E'\,;\ \sup_{f\in Bn}|\langle f,f'\rangle|\leqslant\varepsilon\}$$

とおく．このとき集合族 $\{\mathscr{V}(n,\varepsilon)\}$ は，E' 上の一つの Fréchet 空間構造に関する 0 の基本近傍系になることを証明せよ．

---

1) 位相空間 X 上の連続関数 f の‘台’とは，集合 $\{x\in X\,;\,f(x)\neq 0\}$ の閉包のことをいう．連続でないときには，この定義そのままでは安易すぎる．

11.

可ノルム空間，Banach 空間，例

一つの TVS E が**可ノルム** (normable) であるとは，その位相が一つのノルムで定義できること，すなわち E 上に一つのノルム $\| \quad \|$ が存在して，その球の族

$$B_r = \{x \in E\,;\, \|x\| \leqslant r\},\quad r > 0$$

が，原点の基本近傍系をなすことをいう．有限次元 Hausdorff 空間は可ノルムである．無限次元の距離付け可能空間は，一般には，可ノルムではない．この章と次の章で，可ノルム空間の二つの重要なクラスについて述べる．可ノルム空間の位相は，多くの異なるノルムによって定義され得る．たとえば，$\mathbf{C}^n$ の位相はノルム $| \quad |_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ の中の任意の一つで定義できる．(7 章例 (1) 参照)．

定義 11.1. p, q をベクトル空間 E 上の二つのセミノルムとする．**p が q より強い** (p is stronger than q) とは，定数 $C > 0$ が存在して，すべての $x \in E$ について

$$q(x) \leqslant C \cdot p(x)$$

となることをいう．

p と q が**同値** (equivalent) であるとは，どちらも他方より強いことをいう．

p が q より強ければ，p によって定義される E の位相は q によって定義される位相よりも細かい．したがって q がノルムなら p もノルムになる．

命題 11.1. 一つの可ノルム空間の位相が二つのノルム [の中の任意の一つ] によって定義できるならば，その二つのノルムは同値である．

実際，二つのノルムを p, q としたとき，p の単位球が q の単位球のスカラー倍を含むならば q は p より強いから，同じ位相を定義するならば同値になる．

系　有限次元ベクトル空間上の任意の二つのノルムは同値である．

実際，任意の一つのノルムによって E は Hausdorff TVS になり，それは $\mathbf{C}^{\dim E}$ に TVS として同形になる．これは，すべてのノルムが E 上に同じ位相を定義することを意味している．

《上の系の一つの応用》 一変数 X の複素係数の多項式で次数 $\leqslant m$ のもの全体のなす空間を $\mathcal{P}_1^m$ と書こう．その元 $P(X)$ は

$$P(X)=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+\cdots+a_0,\quad a_0,\ldots,a_{m-1},a_m\in\mathbf{C}$$

と表わされる．$\mathcal{P}_1^m$ 上の二つのセミノルム

$$P\mapsto\|P\|=\left(\sum_{j=0}^{m}|a_j|^2\right)^{1/2},$$

$$P\mapsto\sup_{t\in\mathbf{R},|t|<\varepsilon}|P(t)|$$

を考える．

これらは共にノルムである．最初のものがノルムであるのは明らか．二番目のは，実数直線上のある区間で 0 になる多項式は恒等的に 0 になることに注意すればよい．したがって [上の系から]，m と ε によってきまる定数 C_ε が存在して，すべての $P\in\mathcal{P}_1^m$ について

$$C_\varepsilon\sup_{t\in\mathbf{R},|t|<\varepsilon}|P(t)|\geqslant\|P\|$$

が成り立つ．

実数直線上の区間 $|t|\leqslant\varepsilon$ の代りに，少なくとも $(m+1)$ 個の点を含む複素平面の任意の部分集合を用いてもよいことは明らかであろう．

ノルム空間 (normed space) は可ノルム空間とは少々異なる．ノルム空間とは，ベクトル空間 E と E 上の一つのノルムの対 (pair) である．もちろん E

にそのノルムによる位相を入れて考えるのが普通である．この位相は他の多くのノルムでも定義できるが，しかしノルム空間として扱うときには，少なくとも原則としては，最初のノルムを固定して考えることになる．(E,p), (F,q)を二つのノルム空間とするとき，EからFへのノルム空間構造に関する同形写像とは，EからFへの**線形等距離写像** (linear isometry) である．すなわち，それは線形写像 $u:E\to F$ であって，すべての $x\in E$ について

$$q(u(x))=p(x)$$

となるもののことをいう．

定義 11.2. 完備なノルム空間のことを **Banach 空間** (Banach space) または ***B*–空間** (*B*–space) という．

定義 11.2 の意味は明らかであろう．(E,p) がノルム空間なら，E には p によって定義される位相を入れる．このようにして得られた TVS E が完備（このときは列的完備と同じ；命題 8.2 参照）ならば，対 (E,p) を Banach 空間という．もちろん普通は p を書かないことが多い．ノルム空間は距離付け可能（特に Hausdorff !）だから，*B*–空間は特別の型の Fréchet 空間である (10 章)．したがってまた Baire 空間である．

ノルム空間 (E,p) の商空間および完備化について少し述べて見よう．M を E の閉部分ベクトル空間とするとき，E/M にノルム $\dot{p}$

$$\dot{p}(\dot{x})=\inf_{\phi(x)=\dot{x}} p(x)$$

を定義する（ϕ は $E\to E/M$ なる標準写像)．$\dot{p}$ がノルムであることは明らか．また $\dot{p}$ が E/M の商位相を定義する（命題 7.9）も明らかである．ノルム空間 $(E/M,\dot{p})$ を**ノルム空間 (E,p) の M を法とする商空間**とよぶ．

完備化に関していえば，ノルム p は一様連続だから定理 5.1 によって $\hat{E}$ 上に一意的延長 $\hat{p}$ をもつ（$\hat{p}$ がセミノルムになることは等式および不等式の延長できることからただちにわかる)．$\hat{p}$ が 5 章で定義された $\hat{E}$ 上の位相を定義することは容易に検証できるので読者にまかせる．$\hat{E}$ は Hausdorff だから $\hat{p}$ はノル

ムである．ノルム空間 $(\hat{E}, \hat{p})$ はしたがって Banach 空間になる．この Banach 空間を**ノルム空間** (E, p) **の完備化**とよぶ．いままでは TVS の完備化だけを考えてきた．しかしノルム空間は特別な TVS である上に，ノルムが指定されている．E から $\hat{E}$ への標準的単射は等距離写像である．

例 I. 《有限次元ノルム空間》.

有限次元 Hausdorff TVS は常に完備だから，有限次元ノルム空間は Banach 空間である．もちろん，これら [有限次元ノルム空間] だけが局所コンパクト Banach 空間である．

例 II. 《コンパクト集合上の連続関数の空間》.

K をコンパクト位相空間とする．K には代数的構造はない (だから TVS の部分集合とは限らない)．コンパクトとは Hausdorff である上に，K の任意の開被覆が有限部分被覆を含むことである (6 章参照).

$\mathscr{C}(K)$ を K 上のすべての複素連続関数のなすベクトル空間とする．$\mathscr{C}(K)$ において，絶対値の最大値

$$f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

をノルムと考えれば，$\mathscr{C}(K)$ はノルム空間になる．$\|f\|$ が実際ノルムになること，特に有限の値になることを見るには，コンパクト集合上では連続関数は常に有界であることに注意すればよい (実際 $f(K)$ は複素平面のコンパクト集合になるから有界，命題 6.2 参照)．ノルム空間 $\mathscr{C}(K)$ において，関数列 f_ν が f に収束するというのは，K 上で一様に f_ν が f に収束することである．すなわち $\mathscr{C}(K)$ の位相は，K 上の '一様収束' の位相である．次に $\mathscr{C}(K)$ 上の Cauchy 列 $\{f_\nu\}$ を考えれば，各 $x \in K$ について，数列 $\{f_\nu(x)\}$ は複素平面 $\mathbf{C}$ 上の Cauchy 列になり，したがって極限 $f(x)$ をもつ．かくして，f_ν は K 上で各点ごとに $f(x)$ に収束する．しかし，f_ν が K 上で一様に f に収束することも容易にわかる．実際 $\varepsilon > 0$ を任意にあたえたとき，$N(\varepsilon)$ を $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$ ならばすべての $x \in K$ について

$$|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leqslant \varepsilon/2 \tag{11.1}$$

なるようにとる ($\{f_\nu\}$ が $\mathcal{C}(K)$ の Cauchy 列だから可能). そして，各 $x\in K$ に対し $\mu_x \geqslant N(\varepsilon)$ を

$$(11.2) \qquad |f(x)-f_{\mu_x}(x)| \leqslant \varepsilon/2$$

なるようにとる [これは各点毎の収束からよい].

(11.1) と (11.2) を組合せれば，すべての $\nu \geqslant N(\varepsilon)$ とすべての $x\in K$ について

$$|f(x)-f_\nu(x)| \leqslant \varepsilon.$$

これで f_ν が f に一様収束することがわかった．ところで，f_ν が f に一様収束すれば f もまた連続になる．このことはすでに 10 章例 I，(10.2) の証 (108頁) に述べた論法からわかる．

かくして f は $\mathcal{C}(K)$ の元であり，Cauchy 列 $\{f_\nu\}$ の $\mathcal{C}(K)$ における極限である．これで $\mathcal{C}(K)$ が完備なこと，すなわち Banach 空間であることがわかった．

例 III. 《空間 $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$，$\Omega:\mathbf{R}^n$の有界集合》.

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合であって，$\bar{\Omega}$ がコンパクトなるものとする (換言すれば，Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界開集合)．k を有限な非負整数とする．$\mathcal{C}^k(\Omega)$ の部分集合として，次のような関数 f の全体からなるものを考える (10 章例 I 参照)．f としては，すべての n-系 $p\in\mathbf{N}^n$，$|p|\leqslant k$ について，p 番目の導関数

$$(\partial/\partial x)^p f(x)$$

(これは Ω 上の連続関数) が Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ 上の連続関数に延長できるものを考える．このような $\mathcal{C}^k$ 関数全体を $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ で表わす．$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ は $\mathcal{C}^k(\Omega)$ の部分ベクトル空間になる．$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ はまた，ノルム

$$f \mapsto \|f\|_k = \sup_{|p|\leqslant k}\left(\sup_{x\in\Omega}|(\partial/\partial x)^p f(x)|\right).$$

によりノルム空間になる．その完備性の証明は読者にまかせる；証明には (10.2) の他に，(10.3) (108頁) も用いよ．もちろん $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ は例 II の意味の $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ と一致する．

次の二つの例に進む前に **Minkowski の不等式** (Minkowski's inequalities) について述べておかねばならない．ある程度の一般性を保つために，X を集合

とし dx をその上の**正の測度** (positive measure) とする．X は常に "**可積分集合** (integrable subsets) の列の合併になる" と仮定する．すなわち，dx は **σ–有限** (σ–finite) とする．非負関数 f の**上積分** (upper integral) は $\int^* f\,dx$ と書く．この上積分は，可積分な**階段関数** (step function) の可算無限個の非負係数の一次結合であって，$\geqslant f$ となるものの積分の下限として定義される．多くの f について，実際 $\int^* f dx = +\infty$ となる！ 二つの特別の場合が後で重要になる．(1) X が整数 $\geqslant 0$ の集合 $\mathbf{N}$ で，dx は各点に**質量** (mass)$+1$ をおいた測度の場合：このとき X 上の関数とは数列のことであり，正項数列の上積分はその数列からできる正項級数の和である．(2) X がユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合で，dx は n 変数の Lebesgue 測度の場合．

定理 11.1. p を実数 $\geqslant 1$，f, g を二つの X 上の複素関数としたとき，

$$\left(\int^* |f+g|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int^* |f|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int^* |g|^p dx\right)^{1/p}.$$

証　明　$|f+g| \leqslant |f|+|g|$ だから，始めから f, g ともに $\geqslant 0$ と仮定して差支えない．まず，f, g が可積分な階段関数，すなわち可積分集合の**定義関数** (characteristic function)[1] の有限個の (非負係数の) 一次結合の場合から始める．必要ならば，これらの可積分集合をさらに細分することによって，f, g は同じ定義関数族 $\{\phi_j\}$ の有限個の [相異なる] 一次結合としてよく，また $\{\phi_j\}$ は $j \neq k$ なら $\phi_j\phi_k = 0$ としてよい．すなわち相異なる集合は交わらないようになっているとしてよい．このとき，$f = \sum_{j=1}^k a_j\phi_j$，$g = \sum_{j=1}^k b_j\phi_j$ とすれば

$$(f)^p = \sum_{j=1}^k a_j{}^p\phi_j, \qquad (g)^p = \sum_{j=1}^k b_j{}^p\phi_j, \qquad (f+g)^p = \sum_{j=1}^k (a_j+b_j)^p\phi_j.$$

となる．ここで

$$A_j = a_j\left(\int \phi_j dx\right)^{1/p}, \qquad B_j = b_j\left(\int \phi_j dx\right)^{1/p}$$

とおけば，次の不等式の証明に帰着する．

1) その集合上で 1，外では 0 になる関数のこと．特性関数とも訳す．

$$(11.3)\qquad \left(\sum_{j=1}^{k}(A_j+B_j)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k}A_j{}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{k}B_j{}^p\right)^{1/p}.$$

この (11.3) は $k=2$ のとき証明すればよい．もし $k=2$ のときに証明できたとすれば，$k>2$ のときは帰納法でできる．実際 [$(k-1)$ の場合の仮定から]

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1}(A_j+B_j)^p+(A_k+B_k)^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\left(\left[\left(\sum_{j=1}^{k-1}A_j{}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{k-1}B_j{}^p\right)^{1/p}\right]^p+(A_k+B_k)^p\right)^{1/p}.$$

これに $k=2$ の場合の結果を適用すれば，(11.3) を得る．さて，$k=2$ のとき (11.3) は正斉次関数

$$(x,y)\mapsto(|x|^p+|y|^p)^{1/p}$$

が $\mathbf{R}^2$ 上のセミノルムになること，または同じことだが，集合 $\{(x,y);\ |x|^p+|y|^p\leqslant 1\}$ が凸集合になることを意味する．もちろん，この集合の，領域 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ にある部分だけを考察すればよい．したがって，曲線

$$y=(1-x^p)^{1/p},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

が凹であればよい[1]．$0<x<1$ において第二次導関数 y'' は <0 になるから，求める通りである．

さて，定理 11.1 の証明を完成するのはやさしい．

(1) 可積分集合の定義関数の，係数 $\geqslant 0$ な有限一次結合であるような f, g については，証明済みである．同じような可算無限一次結合についても正しいことは，有限一次結合の増大 [非減少] 列の極限をとることによってただちにわかる．

(2) 今度は f, g を任意の非負関数とする．可積分集合の定義関数の，係数 $\geqslant 0$ な可算無限一次結合であって，あたえられた関数 $h\geqslant 0$ よりも大きい [小さくない] もの全体を $\sum_h$ と書くことにする．(1) に述べた結果から，次の不等式を得る．

$$\inf_{u\in\Sigma_f+\Sigma_g}\left(\int|u|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\inf_{v\in\Sigma_f}\left(\int|v|^p dx\right)^{1/p}+\inf_{w\in\Sigma_g}\left(\int|w|^p dx\right)^{1/p}.$$

1) '凹' は下に凹の意味．上に凸である．普通に凸関数というときは下に凸を意味する．

この右辺が

$$\left(\int^* |f|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int^* |g|^p dx\right)^{1/p}$$

に等しいことは直ちにわかる.

この左辺は $\geq (\int^* (f+g)^p dx)^{1/p}$ である. それは, $\sum_f + \sum_g \subseteq \sum_{f+g}$ からただちに出る. (証終)

例 IV. 《数列空間 l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$》.

l^p は, 複素数列 $\sigma = (\sigma_j)$ $(j = 0, 1, \dots)$ であって,

$$1 \leqslant p < \infty \quad \text{のときは} \quad |\sigma|_{l^p} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\sigma_j|^p\right)^{1/p}$$

$$p = \infty \quad \text{のときは} \quad |\sigma|_{l^\infty} = \sup_{0 \leqslant j < \infty} |\sigma_j|$$

がそれぞれ有限なもの全体のなすベクトル空間である.

定理 11.1 によって, $|\sigma|_{l^p}$ は l^p 上のセミノルムである. 実際それはノルムであって, l^p はノルム空間になる. この空間は完備である. このことを直接に証明することは初めて学ぶものにとってよい演習問題であるが, 次の例の議論の中で証明する一般の **Fisher-Riesz の定理**からも出る.

例 V. 《空間 L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$》.

X を集合, dx を X 上の正の測度とする. dx は σ-有限と仮定する. 読者は積分論の基礎的事実を知っていると仮定する. X 上の複素関数 f で

$$\int^* |f|^p dx < +\infty$$

となるもの全体を $\mathscr{F}^p$ で表わす. 定理 11.1 によって $f \mapsto (\int^* |f|^p dx)^{1/p}$ は $\mathscr{F}^p$ 上のセミノルムになる.

さて, 空間 $\mathscr{F}^p$ において可積分階段関数 (可積分集合の定義関数の複素係数有限一次結合のこと) のなす部分ベクトル空間の上述のセミノルムに関する閉包を $\mathscr{L}^p$ と書く. $p = 1$ のとき, $\mathscr{L}^p$ は可積分関数の空間に他ならない. 次のことが証明できる. 関数 f が $\mathscr{L}^p$ に属するための必要十分条件は, $f \in \mathscr{F}^p$ かつ

f が**可測** (measurable) なことである[1]. 可積分関数の場合，たとえば $f \in \mathscr{L}^p$ のときの $|f|^p_*$ には積分記号の上にある＊印を省略する．そして，

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

とおく．

例外的な場合を除けば，$f \mapsto \|f\|_{L^p}$ は $\mathscr{L}^p$ 上のノルムにはならない．$\|f\|_{L^p} = 0$ なるための必要十分条件は，**ほとんど到るところ**[2] (almost everywhere) $f = 0$ となることである．したがって，セミノルム $\|\ \|_{L^p}$ の核 $\mathscr{N}^p$ は，$\mathscr{L}^p$ の元であってほとんど到るところ 0 になるもの全体になる．$\mathscr{L}^p$ に付随するノルム空間を L^p (しばしば L_p とも書かれる) で表わす．$L^p = \mathscr{L}^p/\mathscr{N}^p$ は，関係“ほとんど到るところ $f = g$”を法とする同値類の空間である．$\dot{f} \in L^p$ に対して

$$\|\dot{f}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$$

と定義する．ここで f は，同値類 $\dot{f}$ の任意の代表元である (g を $\dot{f}$ の他の任意の代表元としても $\|g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ となることに注意しよう．これが三角不等式 (ここでは定理 11.1) からただちにしたがうことは，83 頁で，すでに注意しておいた)．すでに確立している，そして便利な伝統にしたがって，L^p の元である同値類 $\dot{f}$ を，あたかも本当の関数——単に“ほとんど到るところ定義された関数”ではなく——真の[すべての点で定義された] 関数のように取り扱うことが多い．そして大抵の場合‘・印’を省いて，$\dot{f}$ の代りに f と書く．

次に古典的な Fisher-Riesz の定理を述べて証明しよう．

定理 11.2. $\mathscr{L}^p$ のすべての Cauchy 列は収束する．

証　明　$\{f_\nu\}$ を $\mathscr{L}^p$ の Cauchy 列とする．整数の増大列 $\{\nu_k\}$ を $\nu \geqslant \nu_k$ ならば

$$\|f_\nu - f_{\nu_k}\|_{L^p} \leqslant 2^{-k-1}, \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

となるように選ぶ．関数 g_k を $g_0 = f_{\nu_0}$, $g_k = f_{\nu_k} - f_{\nu_{k-1}}$ $(k \geqslant 1)$ とおく．すると

1) 証明は省略する．

2) これを‘$a.e.$’と略記することが多い．

$$f_{\nu_k} = \sum_{k=0}^{K} g_k.$$

ゆえに，級数 $\sum_{k=0}^{\infty} g_K$ が $\mathscr{L}^p$ で収束することを示せば十分である．そのとき，この級数の和が f_{ν_k} の極限，したがって f_ν の極限になる (命題 6.7)．

整数 $h, n = 1, 2, \ldots$ に対して，$N_{n,h}$ を点 $x \in X$ であって

$$\sum_{k=h}^{\infty} |g_k(x)| \geqslant \frac{1}{n}$$

をみたすもの全体の集合とする．集合 $N_{n,h}$ の測度 ($N_{n,h}$ は可測である !) $\mathrm{meas}(N_{n,h})$ を評価するために次に述べる Minkowski の不等式の簡単な一般化を用いる．

$$\text{(11.4)} \qquad \left(\int^* \left|\sum_{l=0}^{\infty} G_l(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left(\int^* |G_l(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

ここで $G_l = g_{h+l} \cdot \chi_{N_{n,h}}$ とおいてみる (χ_A : A の定義関数) ことによって

$$\frac{1}{n} (\mathrm{meas}(N_{n,h}))^{1/p} \leqslant \sum_{k=h}^{\infty} \|g_k\|_{L^p} \leqslant 2^{-h+1}$$

を得る．[これが求める評価である．]

ところで，n を固定すれば，$N_{n,h}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ は集合の非増大列であり，その共通部分を N_n とすれば，N_n は [上の評価から] 明らかに測度 0 である．したがってその合併 $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ もまた測度 0 である．ただちにわかるように，各 $x \in X - N$ においては，級数 $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ は絶対収束する[1]．その和を $g(x)$ とする．$x \in N$ のときには $g(x) = 0$ とおく．g は可測関数列のほとんど到るところの極限だから，**Egoroff の定理** (Egoroff's theorem) によって，g 自身が可測である．また，すべての $x \in X$ について

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)|$$

だから，再び (11.4) を適用すると

$$\left(\int^* |g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_{L^p} \leqslant \|f_{\nu_0}\|_{L^p} + 1.$$

---

1) $x \in X - N \Longleftrightarrow \forall n,\ x \notin N_n \Longleftrightarrow \forall n,\ \exists h,\ x \notin N_{n,h} \Longleftrightarrow \forall n,\ \exists h,\ \sum_{k=h}^{\infty} |g_k(x)| < \dfrac{1}{n}$.
これは剰余項の和が 0 に収束することを示す．

これは $g \in \mathscr{L}^p$ を示す．最後に，g は実際 $\mathscr{L}^p$において，級数 $\sum g_k$ の和[1] になっていることを示そう．まず，任意の $h \geqslant 1$ と任意の $x \in X-N$ について

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{h} g_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=h+1}^{\infty} |g_k(x)|$$

が成り立つ．

両辺を p 乗して，$X-N$ 上で積分すると，(11.4) からただちに

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{h} g_k \right\|_{L^p} \leqslant 2^{-h}$$

を得る．ここで $h \to \infty$ とすればよい．(証終)

系． L^p は Banach 空間である．

さて，X が $\mathbf{R}^n$ の開集合の場合を考えよう．dx は n 次元の Lebesgue 測度を X 上で考えたものとする．X 上の連続関数は，それが恒等的に 0 になるのでなければ，ほとんど到るところ 0 になるわけにはゆかないことに注意しよう．なぜなら，ある一点 x_0 で $f(x_0) \neq 0$ とすると，その点 x_0 のある開近傍で $f(x) \neq 0$ となり，そのような集合の測度は 0 になり得ないからである．このことからただちにわかることは，同値類 $f \in L^p$ は連続関数であるような代表元をたかだか一つしか持ち得ないということである．もし同値類 f が連続関数であるような代表元を一つもつならば，f のことを連続関数とよぶ[2]．ここで次の定義を導入するのが便利である．これは今後もよく用いられる．

定義 11.3. X を位相空間，E を TVS とし，f を X から E への連続写像とする．このとき，集合 $\{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の台 (support) という．f の台を $\operatorname{supp} f$ と書く．

f の台は開集合 $\{x \in X\,;\, x$ のある近傍で $f = 0\}$ の補集合としても定義できる．

1) すなわち，$\mathscr{L}^p$ の位相に関して部分級数の極限．
2) これは言葉の乱用であるが，慣用であり便利でもある．

定理 11.3. X を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．$1 \leqslant p < \infty$ ならば，連続関数であってその台が X のコンパクト集合になるもの全体は，$\mathcal{L}^p(X)$ [†] の稠密な部分ベクトル空間をなす.

定理 11.3 は Lebesgue 測度について述べられている．証明もその場合について述べるが，事実はもっと一般に局所コンパクト空間上の Radon 測度 (21 章参照) について成り立つ.

証　明　$\mathcal{L}^p(X)$ の定義によって，可積分階段関数全体が稠密な集合になっている．したがって，任意の階段関数が，コンパクトな台をもつ連続関数の極限になっていることを示せばよい．しかしながら，そのような任意の階段関数は，可積分集合の定義関数の一次結合であるから，可積分集合の定義関数が近似できることをいえばよい.

$A \subseteq X$ を可積分集合とし，χ_A をその定義関数とする．$\varepsilon > 0$ を任意にあたえると，開集合 Ω_ε とコンパクト集合 K_ε が存在して，$K_\varepsilon \subseteq A \subseteq \Omega_\varepsilon$ かつ $\mathrm{meas}(K_\varepsilon) > \mathrm{meas}(A) - \varepsilon$，$\mathrm{meas}(\Omega_\varepsilon) < \mathrm{meas}(A) + \varepsilon$ となる．そこで，H_ε を K_ε のコンパクト近傍で Ω_ε に含まれるものとする．H_ε の補集合を U_ε とし，$\delta = d(K_\varepsilon, U_\varepsilon)$ と置く (d はユークリッド距離) $[d(K_\varepsilon, U_\varepsilon) = \inf\{d(x, y)\,;\, x \in K_\varepsilon, y \in U_\varepsilon\}]$．$f$ を実数直線上の連続関数であって，常に $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$，$t \leqslant 0$ のとき $f(t) = 1$，$t > \dfrac{1}{2}$ のとき $f(t) = 0$ なるものとする．そして $g(x) = f(1 - \delta^{-1} d(x, U_\varepsilon))$ とおく．g は連続であり (補題 16.1 参照)，台は H_ε に含まれ，したがってコンパクトである．さらに

$$\chi_{K_\varepsilon} \leqslant g \leqslant \chi_{H_\varepsilon} \leqslant \chi_{G_\varepsilon}$$

が成り立つ．ここで χ は定義関数を意味する．これからただちに

$$\int |g - \chi_A|^p \, dx \leqslant 2\varepsilon$$

---

†) 議論の基礎になっている集合 ──いまの場合 X のこと── について混乱のおそれのある場合には，$\mathcal{L}^p$ の代りに $\mathcal{L}^p(X)$ と書く．さらに，考えている測度も明らかにしたいときには，$\mathcal{L}^p(X, dx)$ あるいは $\mathcal{L}^p_{dx}$ あるいは $\mathcal{L}^p_{dx}(X)$ と書いたりする．同様のことは L^p についても行う．もちろん $p = +\infty$ のときも同様にする (次の例)．もし dx が $\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度のときには，記号 $\mathcal{L}^p$ および L^p は，$\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n, dx)$ および $L^p(\mathbf{R}^n, dx)$ を示すことが多い.

を得る．(証終)．

系　X を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．コンパクトな台をもつ連続関数の全体は $L^p(X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ の稠密な部分空間である．

したがって，この場合 (X : $\mathbf{R}^n$ の開集合，dx : Lebesgue 測度) $L^p(X)$ は，コンパクトな台をもつ連続関数全体の空間にノルム $\| \quad \|_{L^p}$ を付けたものの完備化の一つの **"具体的" 実現** (concrete realization) になっている．

例 VI.　《空間 L^∞》

X を集合，dx をその上の正の測度とする．dx は σ-有限，すなわち X はその dx-可積分集合の可算個の合併になっていると仮定する．X 上の複素数値可測関数 f であって，適当な定数 $M \geqslant 0$ に対し

(11.5)　X の部分集合で測度 0 のもの N が存在して，すべての $x \in X-N$ について $|f(x)| \leqslant M$

となるもの全体のなすベクトル空間を $\mathscr{L}^\infty$ と書く．条件 (11.5) をみたすような，すべての M の下限を $\|f\|_{L^\infty}$ と書く．$f \mapsto \|f\|_{L^\infty}$ はあきらかに一つのセミノルムである．

それは，一般には，ノルムにならない．その核は丁度，ほとんど到るところ 0 になる関数全体である．実際，もし f が測度 0 の一つの集合 N の外で 0 に等しいならば，(11.5) において $M=0$ とすることができる．逆に，任意の整数 $k \geqslant 1$ について，測度 0 の集合 N_k が存在して，$x \notin N_k$ のとき $|f(x)| \leqslant 1/k$ となるならば，それらの集合 N_k の合併を N とすると，N は測度 0 であって，N の外では $f=0$ となる．セミノルム空間 $\mathscr{L}^\infty$ に付随するノルム空間を L^∞ と書く．そのノルムは $\dot{f} \mapsto \|\dot{f}\|_{L^\infty}$ である．

L^∞ の代りに，しばしば L_∞ とも書かれる．L^∞ の元は X 上の関数ではなく，関係 "ほとんど到るところ等しい" を法とする同値類である．しかしながら，それらがあたかも関数であるがごとくに扱うことが多い．$\mathscr{L}^\infty$ (または L^∞) の元 f を X 上で (測度 dx に関して) **本質的に有界** (essentially bounded) な関

数という．また $\|f\|_{L^\infty}$ は f の**本質的上限** (essential supremum) という．

定理 11.2 に相当するのは次の定理である．

定理 11.4. $\mathscr{L}^\infty$ において，すべての Cauchy 列は収束する．

証　明　定理 11.2 のときよりも簡単である．$\{f_k\}$ を $\mathscr{L}^\infty$ における Cauchy 列とする．まず，数列 $\|f_k\|_{L^\infty}$ は有界であること，したがって一つの数 A, $0<A<+\infty$ が存在して，各 k について測度 0 の集合 N_k があって，$x\notin N_k$ ならば $|f_k(x)|\leqslant A$ なることに注意しよう．集合列 N_k の合併を N とすれば，N も測度 0 で，すべての k，すべての $x\in X-N$ について $|f_k(x)|\leqslant A$ となる．次に任意の ν に対して，整数 k_ν が存在して，$k,\ l\geqslant k_\nu$ ならば $\|f_k-f_l\|_{L^\infty}\leqslant 1/\nu$ となる [これは Cauchy 列だから明らか]．このことから測度 0 の集合 $N_{\nu,k,l}$ が存在して，すべての $x\notin N_{\nu,k,l}$ について $|f_k(x)-f_l(x)|\leqslant 2/\nu$ となる[1]．

ν, k, l が $k,l\geqslant \nu_k$ をみたしながら動いたときの集合 $N_{\nu,k,l}$ の合併を N' とする．N' は測度 0 であり，$k,l\geqslant \nu_k$ ならば，すべての $x\in X-N'$ について $|f_k(x)-f_l(x)|\leqslant 2/\nu$ となる．ゆえに，関数列 $\{f_k\}$ は $X-(N\cup N')$ において一様収束する．f をその極限とし，$N\cup N'$ では $f=0$ とおいて X 全体に延長する．すると $|f(x)|\leqslant A$ はいたるところ成立する．$N\cup N'$ は測度 0 であるから，可測関数 f_k のほとんど到るところの極限として f も可測になる (Egoroff の定理)，したがって $f\in\mathscr{L}^\infty$, f が $\mathscr{L}^\infty$ における f_k の極限になることは明らかである．(証終)．

系　L^∞ は Banach 空間である．

X が $\mathbf{R}^n$ の開集合で，dx が Lebesgue 測度の場合を考えよう．X 上の有界連続関数全体の空間 $\mathscr{B}^0(X)$ は $\mathscr{L}^\infty(X)$ の部分ベクトル空間である．$f\in\mathscr{B}^0(X)$ ならば，

1) もちろん，ν, k, l には k,l ともに $\geqslant k_\nu$ という制限をつける．このとき $N_{\nu,k,l}=\{x\in X;\ |f_k(x)-f_l(x)|>2/\nu\}$ とすればよい．meas $(N_{\nu,k,l})=0$．

(11.6) $$\|f\|_{L^\infty}=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

が成り立つ．これを検証するのは何でもない．まず，左辺が右辺よりも大きくないことはあきらか．他方，任意の $\varepsilon>0$ に対して，X の空でない開集合 Ω が存在して，すべての $y\in\Omega$ について $|f(y)|\geqslant\sup_{x\in X}|f(x)|-\varepsilon$．このことから，任意の測度 0 の集合の補集合（この補集合は必ず Ω と交わる）上の $|f(x)|$ の上限は $\geqslant\sup_{x\in X}|f(x)|-\varepsilon$ となる．ε は任意だったから (11.6) が成り立つ．

また，$\mathcal{B}^0(X)$ に属する二つの関数がほとんど到るところ等しければ，X 上で全く一致する事に注意する．したがって (11.6) は，$\mathcal{L}^\infty(X)$ から $L^\infty(X)$ への標準写像が，$\mathcal{B}^0(X)$ から $L^\infty(X)$ への等距離写像を引き起こす［標準写像の $\mathcal{B}^0(X)$ への制限が等距離写像］ことを示している．$\mathcal{B}^0(X)$ は Banach 空間である［例 II 参照］ことに注意する．したがって，等距離写像は，$\mathcal{B}^0(X)$ を $L^\infty(X)$ の閉部分空間の上に写す．この閉部分空間は $L^\infty(X)$ 全体にはならない．実際，X 上の $\mathcal{L}^\infty$ 関数であって，どんな有界連続関数にもほとんど到るところ一致することはないものが存在する！

定理 11.3 と比較してみれば，連続関数による近似についての事情は，p が有限のときと $p=\infty$ のときでは非常に違うことがわかる．この相異は，種々のことに影響がある．

E をノルム空間，$\|\ \ \|$ をそのノルムとする．E' を E の双対とする．すなわち，E' は E から $\mathbf{C}$ へのすべての連続線形写像のベクトル空間である．命題 7.7 の系によって，$f\in E'$ ならば，一つの有限な定数 $C\geqslant 0$ が存在して，すべての $x\in E$ について

(11.7) $$|f(x)|\leqslant C\|x\|$$

が成り立つ. (11.7) が（すべての x について）成り立つような数 C の下限を $\|f\|$ と書く．すべての $x\in E$ について

(11.8) $$|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|.$$

$\|f\|$ が，次の二つの等式のどちらによっても定義できることは読者の検証にまかせる．

(11.9)
$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)|;$$

(11.10)
$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} |f(x)|.$$

すなわち，$\|f\|$ は，関数 $x \mapsto |f(x)|$ の単位球面 $\{x \in E; \|x\| = 1\}$ 上の上限である．このことからただちに次の命題を得る．

命題 11.2. E をノルム空間とする．$f \mapsto \|f\|$ は双対 E' 上のノルムになる．

ノルム空間 E を取り扱う際には，その双対 E' は常にノルム空間であると考える．すなわち，E' 上には，(11.9) または (11.10) によって定義されるノルムを考える．

注意を要するのは，単位球面には $|f(x)| = \|f\|$ となる点 x が常にあるとは限らないことである．

ノルム空間上の連続線形汎関数のノルムの概念は，ただちに，一つのノルム空間 E からもう一つのノルム空間 F へ連続線形写像の場合に拡張される．E および F 上のノルムを共に $\|\quad\|$ で表わすことにして，一つの連続線形写像 $u: E \to F$ を考える．命題 7.7 によって，定数 $C \geqslant 0$ が存在して，すべての $x \in E$ について

$$\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$$

となる．ここで再び，u のノルム $\|u\|$ を，このような定数 C の下限として定義する．このとき

(11.11)
$$\|u\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} \|u(x)\|$$

となる．すなわち，複素数の絶対値を F のノルムで置き換えただけである．命題 11.2 もただちに拡張される．なぜなら，$\|u\|$ もまた一つの集合 (E の単位球面) 上の非負関数 $x \mapsto \|u(x)\|$ の上限として定義されているおり，その非負関数はあきらかに u に関して劣加法的だからである．

E から F へのすべての連続線形写像のベクトル空間を $L(E; F)$ とする．E, F 共にノルム空間のときには，$L(E; F)$ もノルム空間と考える．これは，も

ちろん (11. 11) によって定義されるノルムを考えるのである.

定理 11.5. E, F をノルム空間とする. F が完備であるとすれば，ノルム空間 $L(E; F)$ も完備である.

この場合に E が完備であるかないかということは定理の結論には関係がない. そのことは，任意の E から F への連続線形写像は，(F が完備とすれば) E の完備化 $\widehat{E}$ から F への連続線形写像に一意的に延長できること (定理 5. 2, (c) と (II)) から明らかである. 写像の定義域を E から $\widehat{E}$ へ拡張するという操作は, $L(E; F)$ から $L(\widehat{E}; F)$ の上への, ベクトル空間構造の同形写像を引き起こす. この同形写像が，実際には，等距離写像 (ノルムを保つ写像) になっていることの証明は読者にまかせる.

定理 11.5 の証明 $L(E, F)$ が列的に完備であることをいう. $\{u_\nu\}$ を $L(E, F)$ の Cauchy 列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，整数 $N(\varepsilon) \geqslant 0$ が存在して，すべての $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$ について $\|u_\nu - u_\mu\| \leqslant \varepsilon$ となる. ところで，任意の連続線形写像 $u : E \to F$ について

$$\|u(x)\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|, \qquad \forall\, x \in E \tag{11.12}$$

だから ((11. 8) 参照). とくに，すべての $\nu, \mu \geqslant N(\varepsilon)$, $x \in E$ について

$$\|u_\nu(x) - u_\mu(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|. \tag{11.13}$$

これは，任意の固定した $x \in E$ に対して，$\{u_\nu(x)\}$ が F の Cauchy 列であることを示している. ところが，F は完備だから，この点列 $\{u_\nu(x)\}$ は F の一点に収束する. その極限を $u(x)$ と書こう. $x \mapsto u(x)$ は E から F への写像である. これが線形であることを示そう.

x, y を E の元とし，$\varepsilon > 0$ を任意にとる. ν を十分大きくして，

$$\|u_\nu(x) - u(x)\| \leqslant \varepsilon/3, \qquad \|u_\nu(y) - u(y)\| \leqslant \varepsilon/3,$$
$$\|u_\nu(x+y) - u(x+y)\| \leqslant \varepsilon/3$$

となるようにする. これは可能である. なぜなら，u_ν は各点ごとに u に収束するから. 上の三つの不等式を合せて

$$\|u(x+y)-u(x)-u(y)\| \leqslant \varepsilon$$

を得る. εは任意だったから, $u(x+y)=u(x)+u(y)$. 同様の論法で, すべての$x\in E$, すべての$\lambda\in\mathbf{C}$について, $u(\lambda x)=\lambda u(x)$を得る.

さて, uが連続になることを証明しよう. 整数$N(1)$を十分大きくとって, すべての$\nu\geqslant N(1)$について

$$\|u_\nu-u_{N(1)}\|\leqslant 1$$

となるようにする. これから, すべての$x\in E$について

$$\|u_\nu(x)-u_{N(1)}(x)\|\leqslant\|x\|.$$

さて, $\varepsilon>0$とxを任意に選んで固定する. これに対して十分大きな$\nu\geqslant N(1)$が存在して

$$\|u_\nu(x)-u(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

このことから

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &\leqslant \|u_\nu(x)\|+\varepsilon\leqslant\|u_{N(1)}(x)\|+\|x\|+\varepsilon\\ &\leqslant(\|u_{N(1)}\|+1)\|x\|+\varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$は任意だったから

$$\|u(x)\|\leqslant(\|u_{N(1)}\|+1)\|x\|$$

を得る. これはuの連続性を示している.

証明の残っているのは, 連続写像のノルムの意味でu_νがuに収束することである. 再び$\varepsilon<0$を任意として, $N(\varepsilon)$を$\nu,\mu\geqslant N(\varepsilon)$のとき(11.13)が成り立つように選ぶ. $x\in E$, $\|x\|=1$を任意にとって, それに対して$\nu=\nu(x)\geqslant N(\varepsilon)$を$\|u_\nu(x)-u(x)\|\leqslant\varepsilon$なるようにとる. そうすれば

$$\|u_{N(\varepsilon)}(x)-u(x)\|\leqslant\|u_\nu(x)-u(x)\|+\|u_\nu(x)-u(x)\|\leqslant 2\varepsilon.$$

xはEの単位球面上の任意の点だったから, これから

$$\|u_{N(\varepsilon)}-u\|\leqslant 2\varepsilon.$$ [1] (証終).

系. Eをノルム空間とする. E'をEの双対とすれば, ノルム空間E'は

1) 原証明は最後が不完全に終っている. あと一行つけ加えて完成するのは読者のやさしい演習問題としておこう.

Banach 空間である.

演 習 問 題

11.1. $q \geqslant p$ ならば $l^p \subseteq l^q$ となることを示せ. また $l^p \to l^q$ [l^p の各元 σ を l^q の元と思い直すことにより得られる] 単射はノルムが 1 に等しい連続線形写像であることを証明せよ.

11.2. $\sigma \in l^1$ とする. $|\sigma|_{l^\infty} = \lim_{r\to\infty} |\sigma|_{l^r}$ を証明せよ.

11.3. E, F を Banach 空間とする (ノルムは共に $\|\ \ \|$ で表わす). u を E から Hausdorff TVS G への連続線形写像とし, j を F から G への, 一対一, 連続な線形写像とする. $E_0 = \{x \in E;\ u(x) \in j(F)\}$ とおく. このとき, E_0 は, ノルム

$$x \mapsto \|x\| + \|j^{-1}(u(x))\|$$

に関して Banach 空間となることを証明せよ.

11.4. X を集合とし, $\mathscr{F}(X\,;\mathbf{C})$ を X 上の複素数値関数全体の空間に各点収束の位相を入れたものとする. X が有限集合でなければ, $\mathscr{F}(X\,;\mathbf{C})$ は可ノルムでないことを証明せよ.

11.5. $\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ を無限遠で 0 に収束するような $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数全体の空間に, $\mathbf{R}^n$ 上の一様収束の位相を入れたものとする. すなわち, その位相は, ノルム

$$\phi \mapsto \sup_{x\in R^n} |\phi(x)|$$

によって定義されたものとする. $\mathscr{C}_\infty(\mathbf{R}^n)$ は Banach 空間になることを証明せよ.

11.6. $E = \mathbf{C}^2$ とし, ノルム $\|\ \ \|$ を

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto |\zeta|_\infty = \sup(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$$

とする. E_1 を部分ベクトル空間 $\{\zeta \in \mathbf{C}^2\,;\ \zeta_2 = 0\}$ とする. このとき, $\zeta \in E_1$ であって

$$\|\zeta^0 - \zeta\| = \inf_{\zeta' \in E_1} \|\zeta^0 - \zeta'\| \qquad (11.14)$$

となるもの全体のなす集合を特徴づけよ. 特に, $\zeta^0 \notin E_1$ ならば, (11.4) は無限個の ζ によってみたされることを証明せよ.

11.7. 前問題 11.6 において, ノルムだけは

$$\zeta \mapsto |\zeta|_p = (|\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p)^{1/p}$$

に替える $(1 \leqslant p < \infty)$. このとき, (11.4) をみたす ζ は唯一つだけ存在することを証明せよ.

11.8. $E = l^\infty$ とし, ノルムを $\sigma \mapsto |\sigma|_{l^\infty}$ とする. l^∞ の部分空間 l_∞ を, 数列 $\sigma = (\sigma_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ で 0 に収束するもの, すなわち $n \to \infty$ のとき $\sigma_n \to 0$ になるもの全体として定義する. B を l_∞ の単位球

$$\{\sigma \in l_\infty\ ;\ \sup_n |\sigma_n| \leqslant 1\}$$

とし，B_+ を B の元であって，その各項 σ_n が $\geqslant 0$ となるもの全体とする．最後に，すべての項が 1 に等しい数列を e とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1)　B_+ は l^∞ の閉集合である；

(2)　B と e の距離は 1 に等しい；

(3)　e と B_+ の各元の距離は 1 に等しい；

(4)　e と B の元であって，B_+ に属さないものとの距離は >1.

11.9.　一つの TVS E が**可分** (separable) であるとは，E が稠密な可算部分集合を持つときにいう．距離付け可能な TVS E が可分ならば，E の任意の非可算集合 A は収束列を含むことを証明せよ．

11.10.　$L^\infty(\mathbf{R}^1)$ は可分でないことを証明せよ (演習問題 11.9 参照).

12.

Hilbert 空間

歴史的にいえば，無限次元位相ベクトル空間の中で，その理論が研究され応用された最初のものは，いわゆる Hilbert 空間である．純粋数学 (たとえば，境界値問題，確率論，群表現の理論など) および応用数学 (たとえば，量子力学，統計学など) において，Hilbert 空間は非常に重要な役割を演じる．Hilbert 空間ではない関数空間も多いが，それらは多くの場合，Hilbert 構造をもつ部分空間の合併として表わされる．(部分空間の Hilbert 構造は，全空間から誘導される構造よりも細かいことが多い.)[1] これらの "Hilbert 部分空間" の知識が，全空間の重要な性質を，たとえば，関数方程式の解の存在や一意性などに関連して，表わすことが多い．

Hilbert 空間の理論がすばらしい成功を収めた理由は簡単そのものである．それは，Hilbert 空間が有限次元ユークリッド空間に非常に似ているからである．それは次の二つの点に関してである．第一に，Hilbert 空間は，有限次元 TVS と同様に完備である．第二に，Hilbert 空間は**内積** (inner product) を持っている．内積とは，正定値の準双線形形式 (下に述べる) であって，粗らくいえば空間の構造を決定するものである．内積の有効性は，有限次元の場合 (たとえば，自己共役な行列の対角化において) に**正規直交基底** (orthonormal base) がいかに有用であったかを思い起こせば，よくわかるであろう．

まず，ベクトル空間 E 上の**準双線形形式** (sesquilinear form) の復習から始

1) 構造とは位相的な構造を意味する．

める．それは $E\times E$ から複素平面 $\mathbf{C}$ への写像 $(x, y)\mapsto B(x, y)$ であって，次の性質を持つものである．

(1) $B(x_1+x_2, y) = B(x_1, y)+B(x_2, y)$;

$B(x, y_1+y_2) = B(x, y_1)+B(x, y_2)$;

(2) $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$;

(3) $B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x, y)$.

準双線形という名称は，性質 (3) のためである．'sesqui-' ['準双' と訳した] の意味はラテン語で '一倍半' [1.5 倍] ということである．性質 (2) は [(1) と合せると]，固定した y に対して，写像 $x\mapsto B(x, y)$ が線形であることを意味する．しかるに (3) は [(1) と合せるとき]，固定した x に対し，$y\mapsto B(x, y)$ が**半線形** (semilinear) 写像であることを意味する．[これを合計して？，'一倍半線形' となった.]（もし (3) の代りに，$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$ としたときには，**双線形** (bilinear) という．[すなわち '二倍線形' というわけである.]）条件 (3) の重要性は，**エルミート形式** (Hermitian form) の重要性と直接に関連している．B がエルミート形式であるとは，(1), (2) のほかに付加条件

(4) $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$

を置いたものである．エルミート形式が条件 (3) をみたすことは明らか，したがって，エルミート形式は準双線形である．

E 上の準双線形形式 B が**非退化**[1] (non-degenerate) であるとは，次の性質をもつことをいう．

(5) $x\in E$ が，すべての $y\in E$ に対して $B(x, y) = 0$ ならば，$x = 0$ である．また，$y\in E$ が，すべての $x\in E$ に対して $B(x, y) = 0$ ならば，$y = 0$ である．

1) 非縮退とも訳す．degenerate = 退化 = 縮退．

有限次元空間 $\mathbf{C}^n$ における例

$\mathbf{C}^n$ における普通の**エルミート積** (Hermitian product) [内積ということが多い] $(\zeta, \zeta') = \zeta_1\bar{\zeta}_1' + \cdots + \zeta_n\bar{\zeta}_n'$ は非退化エルミート形式である．

形式

$$B(\zeta, \zeta') = \zeta_1\bar{\zeta}_1' - \zeta_2\bar{\zeta}_2'$$

は $\mathbf{C}^2$ 上の非退化エルミート形式である ($\mathbf{C}^n, n > 2$ の上の形式とみれば退化している)．

準双線形形式 B がエルミートであるための必要十分条件は，すべての $x \in E$ について $B(x, x)$ が実数になることである．必要性は，(4) で $x = y$ とおけば明らか．十分性を見るのに，まず

$$(12.1) \qquad B(x+y, x+y) - B(x, x) - B(y, y) = B(x, y) + B(y, x)$$

において，左辺が実数だから $\operatorname{Im} B(y, x) = -\operatorname{Im} B(x, y)$ [1]．(12.1) において y の代りに iy を入れると，左辺はやはり実数であるが，右辺は準双線形性を考慮すると

$$i[B(x, y) - B(y, x)]$$

になるから，$\operatorname{Re} B(y, x) = \operatorname{Re} B(x, y)$，前のと合せて (4) を得る．

この章では，特に**正定値** [2] (positive definite) 形式について議論をする．正定値形式とは，準双線形形式であって，次の条件

(6) すべての $x \in E, x \neq 0$ について $B(x, x) > 0$

をみたすことをいう．したがって，特に正定値準双線形形式はエルミート的である．

また，7 章 (75 頁) におけるように，非負 (定値) 準双線形形式を，次の条件

1) 一般に複素数 z に対し，$\operatorname{Re} z$ はその実部 (real part)，$\operatorname{Im} z$ は虚部 (inaginary part) を表わす．

2) '正定符号' とも訳す．

(7)　すべての $x \in E$ について $B(x, x) \geqslant 0$

をみたすものとして導入する．

非負準双線形形式が退化しないための必要十分条件は，それが正定値なことである．十分性は明らかである．必要性は，次に述べる有名な **Schwarz の不等式**（または **Cauchy–Schwarz の不等式**）から出る．

命題 12.1. $B(\ ,\ )$ を E 上の非負準双線形形式とする．このとき，すべての $x, y \in E$ について

$$|B(x, y)|^2 \leqslant B(x, x)B(y, y)$$

が成り立つ．

証　明　B は負にならないから，

$$0 \leqslant B(x+\lambda y, x+\lambda y) = B(x, x)+2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}B(x, y)]+|\lambda|^2 B(y, y) \tag{12.2}$$

ここで $\lambda = B(x, y)t$ [t : 実変数] とおけばよい．(12.2) の右辺は変数 t の多項式 [二次式] になる．Schwarz の不等式は，この多項式が相異なる二実根を持たないことを示している．

系． B が非負のとき，

$$x \mapsto B(x, x)^{1/2} \tag{12.3}$$

は，E 上のセミノルムである．正定値ならばノルムになる．

実際，$B(\lambda x, \lambda x)^{1/2} = |\lambda| B(x, x)^{1/2}$ であり，また

$$\begin{aligned} B(x+y, x+y)^{1/2} &\leqslant (B(x, x)+2|B(x, y)|+B(y, y))^{1/2} \\ &\leqslant B(x, x)^{1/2}+B(y, y)^{1/2} \end{aligned}$$

は Schwarz の不等式から出る．

定義 7.5 を思い出そう．ベクトル空間 E と，その上の非負準双線形形式 B との対を（複素）準 Hilbert 空間とよんだ．

定義 12.1. ベクトル空間 E とその上の正定値準双線形形式 B との対を複素

Hausdorff 準 Hilbert 空間 (Hausdorff pre-Hilbert space) という．

(E, B) を Hausdorff でない準 Hilbert 空間としよう．Nをすべての $y\in E$ に対して $B(x,y)=0$ となるような点 x の全体とする．Schwarz の不等式によって，Nはセミノルム (12.3) の核と一致する．したがって，商空間 E/N はノルム空間である．$x,y\in E, z\in N$ とすると，

$$B(x+z, y) = B(x, y)$$

となることから，E/Nには次のような標準的準双線形形式 $\dot{B}$ が存在することがわかる．すなわち，ϕを E から E/N への標準写像として，

$$\dot{x} = \phi(x),\ \ \dot{y} = \phi(y) \text{ のとき } \dot{B}(\dot{x}, \dot{y}) = B(x, y)$$

と定義する．$\dot{B}$ は正定値になり，E/Nのノルムは

$$\dot{x} \mapsto \dot{B}(\dot{x}, \dot{x})^{1/2}$$

に一致する．$(E/N, \dot{B})$ のことを，準 Hilbert 空間 (E, B) に付随する Hausdorff 準 Hilbert 空間という．

(E, B) を準 Hilbert 空間とすれば，(12.3) のセミノルムによる位相によって Eは TVS とみなされる．準 Hilbert 空間の TVS 構造というときは，特に断わらない限り，常にこれを指すものとする．

定義 12.2. 完備な Hausdorff 準 Hilbert 空間のことを **Hilbert 空間** (Hilbert space) という．

ノルム空間 $(E, \| \ \|)$ があたえられたとき，それが (Hausdorff) 準 Hilbert 空間になるかどうかを考える．換言すれば，E 上の正定値準双線形形式 $B(\ ,\ )$ であって，すべての $x\in E$ について $\|x\| = B(x,x)^{1/2}$ となるものが存在するかどうか？という問題である．もし存在すれば，そのノルムを E の一つの **Hilbert ノルム** (Hilbert norm) という．この問題の解答は次の命題によってあたえられる．

命題 12.2. E 上のノルム $\| \ \|$ が Hilbert ノルムであるための必要十分条件

は，すべての $x, y\in E$ について，次の条件が成り立つことである．

$$\text{(HN)}\qquad \|x\|^2+\|y\|^2=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2).$$

証 明 ノルム$\|\ \|$が (12.3) であたえられるとするならば，(12.1) からただちに (HN) が出る．逆に (HN) が成り立つとして，

$$R(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),$$

$$J(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$$

とおく．このとき

$$B(x, y)=R(x, y)+iJ(x, y)$$

と定義すると，B は E 上の準双線形形式になることは容易に検証できる．ノルム$\|\ \|$が (12.3) に等しいことも容易にわかる．(証終)．

(E, B) を Hausdorff 準 Hilbert 空間とし，$\|\ \|$をそのノルム (12.3) とする．ノルム空間 $(E, \|\ \|)$ の完備化であるノルム空間を $\widehat{E}$ とする．等式延長の原理によって，(HN) は $\widehat{E}$ においても成り立つ．$\widehat{E}$ のノルムに付随する正定値準双線形形式を $\widehat{B}$ とする．$\widehat{B}$ が B の延長になっていることはただちにわかる．$(\widehat{E}, \widehat{B})$はしたがって Hilbert 空間になる．これを Hausdorff 準 Hilbert 空間の**完備化**という．

上とは別な道をたどることもできる．$y\in E$ を固定して，$x\mapsto B(x, y)$ は E 上の一様連続関数だから $\widehat{E}$ の連続関数に延長できる (延長は一意的)．それを $B'(\hat{x}, y)$ で示す．B' は $\widehat{E}\times E$ 上の関数である．次に $\hat{x}\in\widehat{E}$ を固定して，$y\mapsto B'(\hat{x}, y)$ を考えると，これは E 上の一様連続関数になり．$\widehat{E}$まで連続に一意的に延長できる．それを $B''(\hat{x}, \hat{y})$ と書く[1]．これが $\widehat{E}\times\widehat{E}$ 上の連続準双線形形式になることは見やすい．B'' が上に述べた $\widehat{B}$ に一致する．

さて TVS E の**反双対** (anti-dual) の概念を導入しよう．それは，E から複素平面 $\mathbf{C}$ への連続写像 f のうちで，次の性質

---

1) $B: E\times E\to\mathbf{C}$ は積 TVS $E\times E$ 上で一様連続にはならないので一度に $\widehat{E}\times\widehat{E}$ まで延長できない．

(1) $f(x+y)=f(x)+(y)$;

(2) $f(\lambda x)=\bar{\lambda}f(x)$

をみたすもの全体のなす (複素数体上の) ベクトル空間のことをいう．E の反双対を $\bar{E}'$ で表わす．$\bar{E}'$ の元は．E 上の**連続反線形形式** (continuous antilinear form) (または汎関数；あるいは半線形形式または汎関数) とよばれる，$\bar{E}'$ はベクトル空間であることを強調しておく．$f\in\bar{E}'$ にスカラー λ を掛けることは，普通のとおり $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ によって定義する． もちろん E' から $\bar{E}'$ の上への標準写像が存在する． それは一対一上への， 反線形写像で，E 上の連続線形汎関数 f に対して，連続反線形汎関数 $x\mapsto\overline{f(x)}$ を対応させるものである．

(E, B) を準 Hilbert 空間とする．Hausdorff とも限らず，完備とも限らないとする．さて，写像

(12.4) $$x\mapsto(y\mapsto B(x,y))$$

を考えよう．これは E から，E の反双対への写像である．実際，固定した $x\in E$ に対して，反線形汎関数

(12.5) $$y\mapsto B(x,y)$$

は，Schwarz の不等式からただちにわかるように，連続である．この写像 (12.5) を $\tilde{x}$ で表わそう．すると (12.4) は $x\mapsto\tilde{x}$ と書くことができる．この写像が一対一になるのは，B が非退化，すなわち正定値のときである．いずれにしても，この写像 $x\mapsto\tilde{x}$ を (E, B) からその反双対 $\bar{E}'$ への標準写像とよぶ．Hilbert 空間論の基本定理によれば，この写像が‘上へ’であるとは，(E, B) が Hilbert 空間 (すなわち Hausborff かつ完備) のときそのときに限る．E が Hausdorff 準 Hilbert 空間のときには， それはノルム空間とみなされる (ノルムは (12.3))．ゆえにその双対もノルム空間とみなし得る．さらにそれは Banach 空間である (定理 11.5 の系)． Hilbert 空間の基本定理の述べるところは， 写像 $x\mapsto\tilde{x}$ が Hilbert 空間 E からその反双対 $\bar{E}'$ の上への等距離写像になることである． これが，いまから証明する定理である． また，これは (少々不正確であるが) 次のように要約されることが多い：Hilbert 空間は自分自身の双対に等しい．

この証明は次の重要な定理にもとずく．

定理 12.1. (E, B) を Hausdorff 準 Hilbert 空間とする．K を E の空でない完備凸集合とすれば，各 $x \in E$ に対して一意的に定まる $x_0 \in E$ が存在して

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

となる．

ここで，記号

$$\|x\| = B(x, x)^{1/2}$$

を用いた．今後常にこの記号を用いる．

証明 まず

$$d = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

とおく．K の部分集合 $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ を，不等式

$$\|x - y\| \leqslant d + 1/n$$

をみたす $y \in K$ の全体とする．d の定義によってどの A_n も空ではない．また $A_{n+1} \subseteq A_n$ だから，これらの集合は K 上のフィルター基底を成す．E における形式 $B(\ ,\ )$ による幾何学と K の凸性を用いて，$A_n (n = 1, 2, \ldots)$ によって生成されるフィルターは Cauchy フィルターであることを証明しよう．このとき，K の完備性から，この Cauchy フィルターは（一意的に定まる）一点に収束する．この点 x_0 が求めるものである．

$\varepsilon > 0$ を任意にあたえる．証明すべきことは整数 $N(\varepsilon) \geqslant 0$ が存在して，$n, m \geqslant N(\varepsilon)$ のとき，すべての点 $y_n \in A_n, y_m \in A_m$ について

$$\|y_n - y_m\| \leqslant \varepsilon$$

となることである．この段階にくれば，議論は純然たる二次元の問題になる．すなわち，すべては三点 x, y_n, y_m を含む平面 P 上の問題になる．そして，準双線形形式 B の性質から，囲りの空間 E から平面 P の上に導かれる幾何学は，普通の幾何学になる．二次元平面 P 上で，x を中心とする半径 d の円周

Γ を考える．y_n, y_m はその円周の外にありながら，Γ にいくらでも近くなるとすれば[1]，それらは二点共に一定 [Γ の外にある] の閉凸集合に属するから，互いにいくらでも近くならざるを得ない．さて，これらをきちんと述べると，次のようになる．まず，次式

$$\|\frac{1}{2}[(x-y_n)+(x-y_m)]\|^2+\|\frac{1}{2}(y_n-y_m)\|^2 \tag{12.6}$$

$$=\frac{1}{2}(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2)$$

に注意する (これは (12.1) において x の代りに $x-y_n$ とし，y の代りには $x-y_m$ を入れたものおよび $-(x-y_m)$ を入れたものを考えるとただちに出る[2])．Kが凸であるから，$\frac{1}{2}(x_m+y_n) \in K$．ゆえに

$$\|x-\frac{1}{2}(y_n+y_m)\| \geqslant d.$$

y_n, y_m の選び方 [すなわち $y_n \in A_n, y_m \in A_m$] と (12.6) から，次の評価を得る

$$\|y_n-y_m\|^2 \leqslant 2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2+\left(d+\frac{1}{m}\right)^2\right]-4d^2$$

$$=8d\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)$$

これから容易に求める結果が得られる．(証終)．

定義 12.3. 定理 12.1 の点 x_0 のことを，点 x の完備凸集合 K への**正射影** (orthogonal projection) という．

いまや，Hilbert 空間の基本定理を証明するのは容易である．しかし，事情を明らかにするために，準 Hilbert 空間に関する一つの結果を述べておこう．これは 143 頁に述べた幾つかのことを含んでいる．

---

1) 実際は，y_n, y_m が動くと P も変ることになるから，ここに述べているのは直観的な説明にすぎない．証明とは別．

2) むしろ，命題 12.2 の (HN) において，x の代りに $x-y_n$ とし，y の代りに $x-y_m$ とおいて，両辺に $\frac{1}{2}$ をかけるとよい．

命題 12.3. (E, B) を準 Hilbert 空間とする．写像

$$x \mapsto \tilde{x}, \qquad \tilde{x}: y \mapsto B(x, y) \tag{12.4}$$

は，E からその反双対 $\bar{E}'$ への線形写像である．$\bar{E}'$ をノルム空間とみなそう，そのノルムは，連続反線形汎関数の普通のノルムとする ((11.9) 参照)．このとき (12.4) は E から $\bar{E}'$ の中への連続線形写像になる．この写像が等距離写像になるための必要十分条件は，E が Hausdorff であること，すなわち $B(\ ,\ )$ が非退化であること (すなわち正定値) である．

$\tilde{x}$ が E 上の連続反線形形式であることは，すでに述べたように，Schwarz の不等式からただちに出る．Schwarz の不等式から．また

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)| \leqslant \|x\|$$

となる．ゆえに $x \mapsto \tilde{x}$ は連続．さて，E を Hausdorff と仮定する．$x \neq 0$ とすれば，$y = x/\|x\|$ は $\|y\| = 1$.
ゆえに

$$B(x, y) = \|x\|.$$

これは，(11.10) によって $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ を示している．逆に，$\bar{E}'$ はノルム空間，したがって Hausdorff だから，もし (12.4) が一対一とすれば E 自身が Hausdorff．だから B は非退化である．

さて，基本定理を述べよう．

定理 12.2. (E, B) を Hausdorff 準 Hilbert 空間とする．E からその反双対 $\bar{E}'$ への標準的等距離写像，すなわち写像 (12.4) が上への 写像であるための必要十分条件は，(E, B) が Hilbert 空間になることである．

証　明　必要性は見やすい．ノルム空間 $\bar{E}'$ は汎関数の**複素共役** (complex conjugation) をとれば，ノルム空間 E' のコピーに他ならない．したがって完備である (定理 11.5 の系)．E が $\bar{E}'$ の等距離的な像なら，E もまた完備である．

十分性を見よう．Eを完備と仮定する．命題12.3によれば，(12.4)は中への等距離写像である．証明すべきことは，それが上への写像になることである．換言すれば，E上の任意の連続反線形汎関数fに対して，Eの元x_fが存在して，すべての$y\in E$について

$$f(y)=B(x_f,y)$$

となることである．いまfを恒等的には0でないとして［これは$\bar{E}'$の元として$f\neq 0$ということ］，Hをfの核とする．fは連続だから，Hは閉超平面である(演習問題9.4，命題9.4)．特にHは閉凸集合である．Eが完備だから，Hも完備になる．いま$x\in E, x\notin H$とすると，定理12.1によって，xはHへの一意的な正射影x_0をもつ．$x\notin H$だったから，$x\neq x_0$.

ここで$x-x_0$はHと**直交している** (orthogonal)，すなわち任意の$y\in H$について

$$B(x-x_0,y)=0$$

となる．実際，すべての$t>0$について

$$0\leqslant\|x-x_0-ty\|^2-\|x-x_0\|^2=-t2\,\mathrm{Re}\,B(x-x_0,y)+t^2\|y\|^2$$

が成り立つ．ゆえに

$$2\,\mathrm{Re}\,B(x-x_0,y)\leqslant t\|y\|^2$$

ここで，yを$-y$に替え，さらに$\pm iy(i=(-1)^{1/2})$に替えて見れば

$$|B(x-x_0,y)|\leqslant t\|y\|^2$$

を得る．$t\to 0$とすることによって，$x-x_0$がyに直交することがわかる．

さて，汎関数fの話にもどる．$H=\mathrm{Ker}\,f$であり，$x-x_0\notin H$だから，$f(x-x_0)\neq 0$．そこで

$$z=[\overline{f(x-x_0)}]^{-1}(x-x_0)$$

とおく．

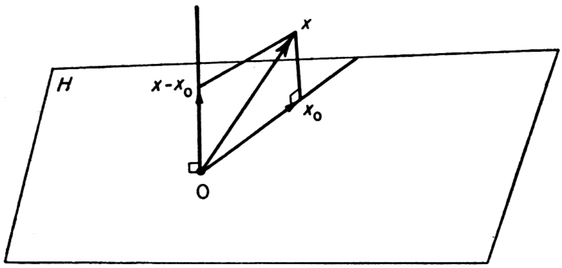


図 1

いま y を E の任意のベクトルとする．$y=y_1+\overline{f(y)}z$ とおいてみれば，$f(z)=1$ だから，明らかに

$$f(y_1)=f(y)-f(y)f(z)=0,$$

すなわち $y_1\in H$ を得る．このとき，

$$B(z,y)=B(z,y_1)+f(y)B(z,z)=f(y)B(z,z).$$

したがって，

$$x_f=(B(z,z))^{-1}z$$

とすればよい．(証終)．

定理 12.1 にもどって考える．E の閉部分ベクトル空間は特に閉凸集合だから，E の任意の点 x に対してその M への正射影が存在する (定義 12.3)．この正射影を $P_M(x)$ と書く．$P_M:x\mapsto P_M(x)$ を，M への**正射影作用素** (orthogonal projection) という．これは E を M の上へ写す．その M への制限は，M の恒等写像である．そのノルムは1に等しい．さらに P_M は**射影作用素** (projection) である，すなわち

$$P_M{}^2=P_M \tag{12.7}$$

が成り立つ．また P_M は**自己共役** (self-adjoint) である，すなわち

$$B(P_M(x),y)=B(x,P_M(y)). \tag{12.8}$$

(準 Hilbert 空間 (E,B) から自身自身への線形写像 u が自己共役であるとは，すべての $x,y\in E$ について，$B(u(x),y)=B(x,u(y))$ となることをいう.) P_M の核は 'M の直交' (orthogonal of M) であり [1]，M^0 で表わす．(E の二つの元

---

1)　詳しくいえば，M に直交する元の全体．

x, y は，$B(x, y) = 0$ のとき‘直交する’という；二つの集合 A, B が直交するとは，すべての $x \in A$ とすべての $y \in B$ について $B(x, y) = 0$ のときにいう.)

このとき，E の直和分解

(12.9) $$E = M \oplus M^0$$

を得る．ここで，記号 $\oplus$ は，直和因子である二つの部分空間が直交していることを意味する．これを **Hilbert 直和** (Hilbert direct sum) または **Hilbert 和** (Hilbert sum) という．

(12.9) は非常に重要な意味を持っている．すなわち，Hilbert 空間 E においては，閉部分空間 M は常に**補空間**[1] (supplementary) をもっている．という意味は，常に E のもう一つの閉部分空間 N が存在して，$E = M + N, M \cap N = \{0\}$ となることである ($N = M^0$ とすればよい，M^0 は M の直交)．Hilbert 空間のもっているこの性質は，TVS の中でも，また B- 空間の中でも，例外的なことである．

E のベクトルの一つの集合が**正規直交** (orthonormal) であるとは，すべての $x \in S$ について $\|x\| = 1$ であり，かつ $x, y \in S$, $x \neq y$ ならば $B(x, y) = 0$ (すなわち，x と y が直交する) ことをいう．準 Hilbert 空間 (E, B) の正規直交集合 S が E の**正規直交基底** (orthonormal basis) であるとは，S によって張られるベクトル空間が E で稠密なことをいう[†].

一つの Hausdorff 準 Hilbert 空間 (E, B) を固定して，これを考察することにする．次の結果を思い出そう (証明は省略する，読者は証明して見るとよい．すでに述べた諸定理から容易に出る).

定理 12.3. S を E の正規直交集合とする．S によって張られる部分ベクトル空間の閉包を V_S とする．このとき，次のことが成り立つ．

(1) すべての $x \in E$ について

---

1) 詳しくは，‘位相的補空間’ (topological supplimentary).

†) $\dim E = \infty$ の場合には，E の正規直交基底は代数的な意味での基底ではない．E の任意のベクトルが，B に属するベクトルの有限一次結合としては表現できないのである．

(12.10)　　$$\sum_{e \in S} |B(x, e)|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad \text{(Bessel の不等式)}$$

このことから，$x \in E$ に対して，S の部分集合 $S_x = \{s \in S; B(x, s) \neq 0\}$ は可算集合になる．

(2)　$x \in E$ に対して次の条件は同値である．

(a)　$x \in V_S$

(b)　(12.10) において不等号 $\leqslant$ は等号 $=$ で置き換えられる．

(c)　級数 $\sum_{e \in S} B(x, e)e$ は (E のノルム $\|\ \|$ に関して) 収束して

$$x = \sum_{e \in S} B(x, e)e$$

が成り立つ．

(3)　V_S が完備であれば，すべての $x \in E$ について級数 $\sum_{e \in S} B(x, e)e$ は収束し

$$P_{V_S}(x) = \sum_{e \in S} B(x, e)e,$$

$$\|P_{V_S}(x)\|^2 = \sum_{e \in S} |B(x, e)|^2 \qquad \text{(Parseval の等式)}$$

が成り立つ．

S を任意の集合とする[1]．S 上で定義された複素数値関数 λ であって

(12.11)　　$$\sum_{s \in S} |\lambda(s)|^2 < +\infty$$

となるもの全体を $l^2(S)$ と書く．S 上の関数 λ が $l^2(S)$ に属すならば，λ は S のある可算集合の補集合の上で恒等的に 0 となる (すなわち，その関数の台が可算集合；S に離散位相を入れるならば，すべての集合が閉集合；このとき，関数の台はその関数が 0 にならない点全体である)．$\lambda \in l^2(S)$ のノルムを (12.11) の左辺の平方根で定義する．このノルムを $\|\ \|$ で示す．このノルムが条件 (HN) (命題 12.2) をみたすことは容易にわかる．したがってそれは一つの準双線形形式から導かれる．実際

$$(\lambda|\mu) = \sum_{s \in S} \lambda(s)\overline{\mu(s)}$$

がその準双線形形式である．$l^2(S)$ が完備なことは容易に証明できる．したが

1)　いままでの S とは無関係．

って $l^2(S)$ は Hilbert 空間になる.

定理 12.1 と定理 12.3 から容易に次の定理を得る.

定理 12.4. Hilbert 空間 (E, B) には常に正規直交基底が存在する. さらに, E の任意の正規直交集合 L に対して, L を含む正規直交基底が存在する.

S を Hilbert 空間 E の一つの正規直交基底とする. 任意の $x \in E$ に対し, S 上で定義された複素数値関数

$$f_x : s \mapsto B(x, s)$$

を対応させる. このとき, 写像

$$x \mapsto f_x$$

は E から $l^2(S)$ の上への等距離写像になる.

定理 12.4 からただちに, 一つの正規直交集合 S が正規直交基底であるための必要十分条件は, $x \in E$ について, すべての $s \in S$ に対して $B(x, s) = 0$ ならば $x = 0$ となることであることがわかる.

Hilbert 空間の例

I. 空間 l^2. これは複素数列 $\sigma = (\sigma_n)$ で

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n|^2 < +\infty$$

となるもの全体である. その**内積** (すなわち, l^2 を Hilbert 空間にする準双線形形式) は

$$(\sigma | \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \bar{\tau}_n.$$

II. 空間 L^2 (11 章例 V). これは, (一つの集合 X 上のある正の測度 dx に関して) 二乗可積分な関数 f (の同値類) の空間である. その内積は

$$(f | g) = \int f(x) \overline{g(x)} dx,$$

したがってそのノルムは

$$\| f \|_{L^2} = \left(\int | f(x) |^2 dx \right)^{1/2}$$

であたえられる．この空間 L^2 (はじめは $\mathbf{R}^n$ の開集合上の Lebesgue 測度に関するもの，後には一般の測度に関するもの) の重要性の認識が Hilbert 空間の理論の出発点であった．

III.　任意有限次元空間 $\mathbf{C}^n$ に普通のエルミート積を入れたもの．

注意 12.1. ノルム空間 (E, p) からノルム空間 (F, q) の上への同形写像とは，E から F の上への線形写像であって，すべての $x \in E$ について

$$q(u(x)) = p(x)$$

となるものである．換言すれば，E から F の上への線形等距離写像である (そのような写像は明らかに一対一)．

同様に，準 Hilbert 空間 (E, B) から，もう一つの準 Hilbert 空間 (E_1, B_1) への同形写像とは，E から E_1 の上への一対一の線形写像であって，すべての $x, y \in E$ について

$$B_1(u(x), u(y)) = B(x, y)$$

となるものとして定義する．いま $(E, B), (E_1, B_1)$ ともに Hausdorff，すなわち準双線形形式 B, B_1 がともに正定値とすれば，これらの空間はノルム空間とみなすことができる．等式 (HN) によれば，E から E_1 の上への同形写像は，ノルム空間構造の意味にとっても Hausdorff 準 Hilbert 空間構造の意味にとっても同一であることがただちにわかる．

注意 12.2. 準 Hilbert 空間 E の部分ベクトル空間 M には自然に準 Hilbert 空間の構造が入る．それには，M の内積として，E の内積 $(x, y) \mapsto B(x, y)$ の M への制限 $B|M$ をとればよい．(E, B) が Hausdorff ならば $(M, B|M)$ も Hausdorff である．(E, B) が Hilbert 空間で，M が閉ならば，$(M, B|M)$ も Hilbert 空間になる．

注意 12.3. $(E_1, B_1), (E_2, B_2)$ を二つの準 Hilbert 空間とする．積ベクトル空間 $E_1 \times E_2$ は，その上に準双線形形式

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2)$$

を考えることによって準 Hilbert 空間になる．これを，あたえられた二つの準 Hilbert 空間の**積準 Hilbert 空間** (product pre-Hilbert space) という．

演 習 問 題

12.1. E を Hilbert 空間とする．u を E から自分自身への連続線形写像で，自己共役な射影とする ((12.7), (12.8) 参照)．このとき u は E からその一つの閉部分空間 M への正射影になっていることを示せ．

12.2. E を Hilbert 空間であって，$E \neq \{0\}$ とする．このとき E の位相は Hilbert ノルムでないようなノルムによっても定義できることを証明せよ (命題 12.2 参照)．

12.3. E, F を二つの Hilbert 空間とする．積空間 $E \times F$ 上には，次の性質をもつ Hilbert ノルムが一意的に存在することを示せ．

(a) このノルムによって定義される位相は積位相である；

(b) 各'座標軸' E および F への標準的射影はノルムが 1 に等しい．

12.4. E, F を二つの Hilbert 空間，G を任意の Hausdorff TVS とする．$u: E \to G$ を連続線形写像，$j: F \to G$ を連続線形単射とする．このとき E の部分ベクトル空間

$$H = \{x \in E;\ u(x) \in j(F)\}$$

の上に次の性質をもつ Hilbert ノルム $\|\ \|$ が存在することを証明せよ．

(a) H から E への自然な単射はノルムが $\leqslant 1$;

(b) 写像 $j^{-1} \circ u: H \to F$ はノルムが $\leqslant 1$;

(c) ノルム $\|\ \|$ に関して H は Hilbert 空間になる．

12.5. 二つの準 Hilbert 空間 $(E_1, B_1), (E_2, B_2)$ の積準 Hilbert 空間を $(E_1 \times E_2, B)$ とする (注意 12.3 参照)．このとき，$(E_1 \times E_2, B)$ が Hausdorff なるための必要十分条件は (E_j, B_j) $(j = 1, 2)$ がともに Hausdorff であることであり，$(E_1 \times E_2, B)$ が Hilbert 空間になるのは，(E_j, B_j), $(j = 1, 2)$ が共に Hilbert 空間になるときである．これを証明せよ．

12.6. $(E. B)$ を Hilbert 空間とし，M をその閉部分ベクトル空間とする．このとき商空間 E/M 上には，標準的な Hilbert 空間構造が存在することを示せ．また，この構造は次の性質をもつことを証明せよ．

(a) E/M 上の商位相は，その標準的構造によって定義される．

(b) $\phi: E \to E/M$ を標準写像とするとき，M の E における直交 M^0 (これに E から導かれる Hilbert 空間構造を入れる，すなわち B を M^0 に制限したものを M^0 の内積とする) に ϕ を制限した写像は M^0 から E/M の上への (Hilbert 空間構造に

関する) 同形写像になる.

12.7. 一つの TVS E が**可分**であるとは, E が稠密な可算部分集合をもつことをいう. 準 Hilbert 空間 (E, B) が可分であるとは, その'下地としての'[1] (underlying) TVS E が可分なことをいう. Hilbert 空間 (E, B) が可分であるための必要十分条件は, それが可算正規直交基底 (149頁) をもつこと, すなわち (E, B) から l^2 への (Hilbert 空間構造に関する) 同形写像が存在することである. これを証明せよ.

12.8. 指数関数

$$t \mapsto e^{2i\pi kt}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

が $L^2([0,1])$ の正規直交基底をなすことを意味するような, Fourier 級数についての定理を述べよ (引用せよ).

12.9. 各n系 $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n$ に対して

$$h_p(x) = \exp[|x|^2](\partial/\partial x_1)^{p_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{p_n} \exp[-\pi|x|^2]$$

とおく. p が $\mathbf{N}^n$ 上を動くとき, $L^2(\mathbf{R}^n)$ において h_p は互いに直交することを証明せよ. (定数 $\alpha_p > 0$ を適当に選ぶことによって, 関数 $\alpha_p h_p$ が $L^2(\mathbf{R}^n)$ における正規直交基底になることが証明できる. これから $L^2(\mathbf{R}^n)$ が可分であることがわかる; 演習問題 12.7 参照.)

12.10. (E, B) を Hilbert 空間とし, S を E の正規直交基底とする. もし $\dim E = +\infty$ ならば, $x \in E$ が存在して, 級数

$$\sum_{s \in S} B(x, s)s$$

が絶対収束しないこと, すなわち

$$\sum_{s \in S} B(x, s)(B(s, s))^{1/2} = +\infty$$

となることを証明せよ. (ヒント: 定理 12.4 を用いて, もし上の事実が成り立たないと仮定すれば, $l^2 = l^1$ となることを用いよ.)

---

1) 'underlying' 下に横たわる. すなわち単なる TVS としての.

13.

LF-空 間，例

Eを複素数体上のベクトル空間とする．Eは部分ベクトル空間の増大列 E_n, $n=1,2,\ldots$ の合併に等しいと仮定する．ここで各 E_n には Fréchet 空間の構造がはいっていて，E_n から E_{n+1} への自然な単射（各 n について $E_n \subseteq E_{n+1}$ である）が同形写像になっているとする，すなわち E_{n+1} から E_n 上に導かれる位相が E_n にもとからあった位相と一致すると仮定する．このとき，E 上に Hausdorff 局所凸空間の構造を次のように定義する．Eの凸集合が 0 の近傍であるとは，すべての $n=1,2,\cdots$ に対して $V\cap E_n$ が Fréchet 空間 E_n の 0 の近傍になる事とする．E にこの位相を入れたとき，E を一つの **LF-空間**[1]（LF-space）または可算個の Fréchet 空間の**狭義帰納極限**（strict inductive limit）といい，Fréchet 空間列 $\{E_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ を E の一つの**定義列**（defining sequence）という．後に述べる例でわかるように，一つの LF-空間 E が幾つかの，実際には無限に多くの，相異なる定義列を持ち得る．

$\{E_n\}$ を LF-空間 E の定義列としよう．各 E_n はそれにつづくもの E_{n+1}, $E_{n+2},\cdots$ に同形に埋め込まれている．しかし E_n が E に同形的に埋め込まれているかどうかは，前もってはわからない．換言すれば，E の位相から導かれる E_n 上の位相が，E_n にもとからある位相と一致するかどうかが問題になる．U を E における 0 の近傍としよう．U は E の 0 の凸近傍 V を含むが，$V\cap E_n$ は E_n における 0 の近傍になる．したがって，E から導かれる E_n の位相は E_n

---

1) スクリプト文字を用いて $(\mathscr{LF})$-空間と書くことが多い．

のもとの位相より粗らい. Eからの誘導位相がE_nのもとの位相と実際には一致することは, 次の補題から出る.

補題 13.1. Eを局所凸空間, E_0をその閉部分空間とする. UをE_0における0の凸近傍とし, x_0をEの点であってUに属さないものとする. このとき, Eにおける0の凸近傍Vで, $x_0 \notin V$, $V \cap E_0 = U$となるものが存在する.

証明 上の陳述においてE_0にはもちろんEからの誘導位相を入れて考えている. したがってEにおける0の近傍Wが存在して$U = W \cap E_0$となる. 問題は, Wが凸でないかもしれないし, 点x_0を含むかもしれないことである. そこで, そうならないようにWを修正しよう. まずWはEにおける0の凸近傍W_0を含むから, Eにおける$U \cup W_0$の凸包をW_1とおく. このとき$U \subseteq W_1 \cap E_0$は明らかだが, 実は

$$W_1 \cap E_0 = U \tag{13.1}$$

となる. 実際, $x \in W_1 \cap E_0$としてみると, $x \in W_1$だから$x = ty+(1-t)z$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $y \in U$, $z \in W_0$と書ける. もし$t=1$ならば$x = y$となってUに属する. もし$t<1$ならば$z = (1-t)^{-1}(x-ty) \in E_0$, したがって$z \in W_0 \cap E_0 \subseteq W \cap E_0 = U$. ところで$U$は凸だから, $x \in U$. これで(13.1)の証明ができた.

今度はW_1を‘切り縮めて’x_0を含まないようにしよう. ところで, もし$x_0 \in E_0$ならば, $x_0 \notin U$だから何もしないでよい. そこで$x_0 \notin E_0$と仮定しよう. 商空間E/E_0を考え, ϕをEからE/E_0の上への標準写像とする. E/E_0はHausdorff局所凸TVSであり, $\phi(x_0) \neq 0$である. そこでE/E_0における0の凸近傍を$\phi(x_0)$を含まないように選び, そのϕによる逆像をΩとする. したがってΩはEにおけるE_0の凸近傍[1], したがってもちろん0の近傍であってx_0を含まない. ゆえに$V = W_1 \cap \Omega$は補題に述べた要求をすべてみたすものである. (次の図2参照).

---

1) 集合の近傍とは, その集合を含む一つの開集合を含む集合

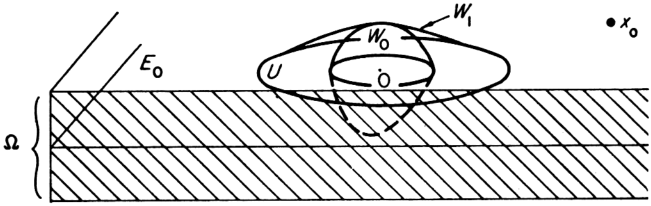


図 2

さて，補題 13.1 を用いて，F-空間の列 $\{E_n\}$ の狭義帰納極限 E が各 E_n 上に誘導する位相は E_n のもとの位相に一致することを示そう．E_n における 0 の任意の凸近傍を U_n とする． 補題 13.1 によって，E_{n+1} の 0 の凸近傍 U_{n+1} が存在して $U_{n+1}\cap E_n = U_n$ となる．n に関する帰納法によって，各 $k=1,2,\cdots$ について E_{n+k}における 0 の近傍 U_{n+k} が存在して

$$U_{n+k}\cap E_{n+k-1} = U_{n+k-1}$$

となる．そこで

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{n+k}$$

とおけば，$U\cap E_n = U_n$ となり，さらに，すべてのmに対して $U\cap E_m$ は E_m における 0 の近傍になるから，U は E における 0 の近傍である．

命題 13.1. E を LF-空間とし，$\{E_k\}(k=1,2,\ldots)$ をその定義列とする．F を任意の局所凸 TVS とし，u を E から F への線形写像とする．写像 u が連続であるための必要十分条件は，u の各 E_k への制限 $u|E_k$ が E_k から F への連続写像になることである．

証　明　$u: E\to F$ を連続と仮定する．V を F での 0 の近傍とすると，$u^{-1}(V)$ は E における 0 近傍となる． したがって， 各 k について $U_k = U\cap E_k$ は E_k において 0 の近傍になり，かつ

$$U_k = u^{-1}(V)\cap E_k = (u|E_k)^{-1}(V).$$

ゆえに $u_k|E_k$ は連続である．

逆に，各 k について $u|E_k : E_k\to F$ が連続と仮定する． V を F の 0 の近傍

とする. さて, ここで (はじめて) F が局所凸であることを用いる. このとき V, したがって $u^{-1}(V)$ が凸であると仮定してよい. ところで, 各 k について

$$u^{-1}(V) \cap E_k = (u|E_k)^{-1}(V)$$

は E_k における 0 の近傍だから, 凸集合 $u^{-1}(V)$ は E における 0 の近傍である. (証終).

系. E 上の線形形式が連続であるためには, その各 E_k への制限が連続になることが必要十分である.

これらの結果は, 後に見るように, 超関数の理論に応用した際, 証明の簡単化に非常に役立つ.

注意 13.1. $E = \mathrm{ind\,lim}_n E_n$ [1] が Fréchet 空間でなければ, E は決して Baire 空間にはなり得ない. 実際, 各 E_n は完備だから E の閉部分空間である (ここで, E から E_n に誘導した位相が E_n のもとの位相と同じであることを用いた. そうでなければ, 一般には, E_n が E で閉であるとはいえない). かくして, E は可算個の閉集合 E_n の合併である. もし E が Baire 空間であるとすれば, これらのうちの一つ, それを E_{n_0} とする, が内点 x_0 を持たねばならない. ところで, 写像 $x \mapsto x - x_0$ は E から自分自身の上への位相写像であるから, 原点 0 もまた E_{n_0} の内点になる. 換言すれば, E_{n_0} は原点の近傍である. ところで, 近傍は吸収的だから, E_{n_0} も吸収的であるが, E_{n_0} は部分ベクトル空間だからただちに $E_{n_0} = E$ を得る. これは E が F-空間であることを示している.

注意 13.2. E を LF-空間とし, $\{E_n\}$ をその定義列とする. M を E の一つの閉部分ベクトル空間とする. このとき, E から導かれる M 上の位相は, F-空間列 $E_n \cap M$ の帰納的極限の位相とは, 一般には, 一致しない. このことは見逃さないように注意しなければならない. (実際, 著者はいままでに幾度か間違えたし, 他にも間違えた人達を知っている!)

---

1) ここでは, E が部分空間列 $\{E_n\}$ の狭義帰納的極限の意味. $E = \varinjlim_n E_n$ と書くこともある. しかし, この記号はもっと一般な帰納的極限を表わすこともある.

定理 13.1. LF-空間はすべて完備である．

証 明 EをLF-空間，$\{E_n\}(n=1,2,\cdots)$をEの定義列とする．$\mathscr{F}$をE上のCauchy フィルターとする．Mが$\mathscr{F}$の中を動き，VがEにおける0の近傍フィルターを動くとき，集合$M+V$の全体はE上の一つのフィルター基底をなす．なぜなら，

$$M\cap M'+V\cap V'\subseteq(M+\mathrm{V})\cap(M'+\mathrm{V}')$$

となるからである．これによって張られるフィルターを$\mathscr{G}$としよう．$\mathscr{G}$はCaucby フィルターになる．実際，UをEにおける0の任意の近傍とし，Vを0の近傍であって$V+V-V\subseteq U$なるものとする．$M\in\mathscr{F}$を$M-M\subseteq V$なるようにとると，このとき

$$(M+V)-(M+V)\subseteq M-M+V-V\subseteq U$$

となるからである．$\mathscr{F}$は$\mathscr{G}$よりも細かいことに注意しておこう．さて，次の事実が成り立つ．[証明後述]．

(13.2) $\begin{cases}\text{整数 } p\geqslant 1 \text{ が存在して，} A \text{ が } \mathscr{G} \text{ を動くときに，集合 } A\cap E_p \text{ は決}\\ \text{して空にならない．}\end{cases}$

このことから，定理13.1が出る．実際，集合$A\cap E_p$はどれも空にならないから，これはE_p上の一つのフィルター$\mathscr{G}_p$になる．Eから導かれるE_pの位相はE_pのもとの位相と一致するから，$\mathscr{G}_p$はE_p上のCauchy フィルターである．ところがE_pはFréchet 空間だから，$\mathscr{G}_p$はE_pの一点xに収束する．xが$\mathscr{G}$の集積点になることは明らか，ゆえに$\mathscr{G}$はxに収束する，したがってもちろん$\mathscr{F}$はxに収束する．

(13.2.)の証明. (13.2)が成り立たないと仮定して，矛盾になることを示そう．すなわち，各$n=1,2,\cdots$に対して，$A_n=M_n+V_n\in\mathscr{G}$が存在して$E_n$と交わらないと仮定する．心要ならば$A_n$を縮めて，$E$の0の近傍$V_n$はすべて平衡的凸集合とし，$V_n\subseteq V_{n-1}$がすべての$n>1$について成り立つとしてよい．さて，$W_n$を集合

$$V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap E_k)$$

の凸包とする．このとき M_n+W_n は E_n と交わらない．なぜなら，もし交わったとすると，ある数 t, $0\leqslant t\leqslant 1$ に対して $x\in M_n$, $y\in V_n$, $z\in E_{n-1}$ が存在して $x+ty+z\in E_n$[1] となる．しかし，V_n は平衡的だから $ty\in V_n$ であり，また $z\in E_n$ だから，$x+ty\in M_n+V_n$ が E_n にも属することになり，A_n の選び方に反する．さて，$\bigcup_{k=1}^{\infty}(V_k\cap E_k)$ の凸包を W とする．W は凸集合で，すべての k について $W\cap E_k$ は $V_k\cap E_k$ を含むから，W は E における 0 の近傍である．ところが $\{V_n\}$ は減少列だったから，すべての n について

$$V_n\cup\bigcup_{k<n}(V_k\cap E_k)\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(V_k\cap E_k).$$

したがって，すべての n について $W\subseteq W_n$ となる．ところで $\mathcal{F}$ は Cauchy フィルターだったから，$B\in\mathcal{F}$ が存在して，$B-B\subseteq W\subseteq W_n$ (すべての n について)．また，すべての n について $B\cap M_n\neq\emptyset$ だから，$B-(B\cap M_n)\subseteq W_n$. したがって，

$$B\subseteq W_n+(B\cap M_n)\subseteq W_n+M_n.$$

これより，すべての n について $B\cap E_n=\emptyset$. ゆえに，$B=\emptyset$ これは [$\mathcal{F}$ がフィルターだから] 不可能．(証終).

例 I. 《多項式の空間》

n 変数 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ の複素係数の多項式全体のベクトル空間を $\mathbf{C}[X]$ で表わす．この空間には標準的な代数的基底として，単項式の全体

$$X^p=X_1^{p_1}\cdots X_n^{p_n},\qquad p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbf{N}^n$$

がある．(ここで $\mathbf{N}^n$ は座標がすべて非負整数となる $\mathbf{R}^n$ のベクトル全体である.) 任意の多項式は単項式 X^p の有限一次結合である．$\mathcal{P}_n^m$ を X^p, $|p|=p_1,\cdots,p_n\leqslant m$ で張られるベクトル空間としよう．$\mathcal{P}_n^m$ の元は次数が $\leqslant m$ となる多項式である．多項式 $P(X)$ の次数は．$P(X)\in\mathcal{P}_n^m$ となる最小の整数 m に等しい．この m を $\deg P$ で示す[2] $|p|\leqslant m$ となる単項式 X^p の個数は，簡単な計算から，$\binom{m+n}{m}$ に等しいことがわかる．すなわち

1) $x+ty+(1-t)z$ と書いてもよいが，$(1-t)z\in E_{n-1}$.

2) ここで $P(X)\neq 0$ とする．多項式 0 の次数は定義しない．人によっては $\deg 0=-\infty$ とする．

$$\dim \mathcal{P}_n{}^m = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

いま．多項式 P を

$$P(X) = \sum_{|p| \leqslant \deg P} c_p X^p$$

とする．P は $\mathbf{N}^n$ 上の関数と見ることができる．すなわち，$|p| \leqslant \deg P$ なる p に対して c_p という値をあたえ，それ以外の p に対しては 0 とする関数である．多項式に対して $\mathbf{N}^n$ 上の関数を対応させるこの写像は，乗法 [掛け算] を保存しないことに注意しよう． 二つの多項式の積に対応する関数は，それぞれの多項式に対応する関数の積に等しくないのである．(多項式の積は関数の**合積成** (convolution) に変換されることは後に述べる.) いずれにしても，$\mathbf{N}^n$ に離散位相をあたえることにすると，すべての集合が閉集合になり，多項式に対応する関数はちょうどコンパクトな台をもつ関数になる．$\mathbf{N}^n$ の部分集合がコンパクトになるのは有限集合のときである．$\mathbf{N}^n$ 上の任意の関数は [係数を通して] 形式的巾級数に対応する．$\mathbf{C}[X]$ が，n 変数の複素係数形式的巾級数の空間 $\mathbf{C}[[X]]$ の部分ベクトル空間，さらには部分代数 (または部分環) になることは明らかであろう．

$\mathcal{P}_n{}^m$ は有限次元だから，一意的な Hausdorff 位相が入り，それに関して Fréchet 空間となる．$\mathbf{C}[X]$ は *F*-空間列 $\mathcal{P}_n{}^m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ の合併だから，$\mathbf{C}[X]$ に帰納的極限位相を入れると，それは LF-空間になる，この位相は $\mathbf{C}[X]$ 上の位相としては $\mathbf{C}[[X]]$ から導かれた位相よりも真に細かいことに注意しよう．もちろん $\mathbf{C}[[X]]$ には係数の単純収束の位相を入れて考える (10章，例 III).

例 II.《テスト関数 (test function) **の空間》**

Ω を $\mathbf{R}^n$ の空でない開集合とする．$F(\Omega)$ を次の関数空間の中の任意の一つとしよう．

$$\mathcal{C}^k(\Omega),\ (0 \leqslant k < \infty),\ \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ L^p(\Omega),\ (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$ は *F*-空間であり，$L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ は *B*-空間である．$L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間になる．

K を Ω のコンパクト集合とする．すなわち $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であって Ω に含まれるものである．$F(\Omega)$ の部分集合 $F_c(K)$ を，関数 $f \in F(\Omega)$ であってその台が K に含まれるもの全体として定義する．f の台，supp$f$ と書く，とは集合

$$\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$$

の Ω における閉包であった．$F_c(K)$ が関数 0 (すなわち，恒等的に 0 になる関数) しか含まないということも起こり得る．たとえば $F(\Omega) = \mathscr{C}^0(\Omega)$ (実は，上に考えたどの関数空間を $F(\Omega)$ としてもよい) とし，K を一点から成る集合 (あるいは Lebesgue 測度 0 の集合) とすればよい．いずれにしても，$F_c(K)$ は $F(\Omega)$ の部分ベクトル空間であり，容易にわかるように，どの場合でも閉である．実際，上に挙げた空間の任意の一つ $F(\Omega)$ において，関数列 $\{f_k\}$ が関数 f に収束するとし，すべての f_k が開集合 $\Omega-K$ で 0 になっているとすれば，その極限 f もまた $\Omega-K$ で 0 になる．したがって $F(\Omega)$ の閉部分空間として，$F_c(K)$ は F–空間になる，すなわち完備である．$F = L^p$ のときは $F_c(K)$ はさらに B–空間になるし，L^2 のときには Hilbert 空間になる．B–空間になることは $F = \mathscr{C}^k, 0 \leqslant k < \infty$ のときも同様である．実際，この場合，$F_c(K)$ の位相が唯一つのノルム

$$f \mapsto \sup_{|p| \leq k} (\sup_{x \in R^n} |(\partial/\partial x)^p f|)$$

で定義されることはほとんど明らかである．これは，関数の台が一定のコンパクト集合 $K \subseteq \Omega$ に含まれている場合には，全空間での一様収束と Ω の各コンパクト集合上の一様収束とが同等であることを示している．

$F = \mathscr{C}^\infty$ のときには，$F_c(K)$ はもはや B–空間ではない (それが 0 だけからなる場合を除いて)．それは F–空間である．しかし，次章で見るように，可ノルム空間ではない．

記　号．次の記号を用いることにする．

$F(\Omega) = \mathscr{C}^k(\Omega)$，$0 \leqslant k \leqslant \infty$ のとき，$F_c(K)$ を $\mathscr{C}_c^k(K)$ と書く；

$F(\Omega) = L^p(\Omega)$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$ のとき，$F_c(K)$ を $L^p(K)$ と書く．$L^p(K)$ は普通

の記法によるもの，すなわち K 上ほとんど到るところ定義された Lebegue 可測であって L^p に属す関数の同値類のなす B-空間と一致する．このことの検証は読者にまかせる．さて，K が Ω のあらゆるコンパクト集合を動くときの，部分空間 $F_c(K)$ の合併を考えよう．この合併を $F_c(\Omega)$ と書く．これは $F(\Omega)$ の部分ベクトル空間，正確にいえば，コンパクトな台をもつ $F(\Omega)$ の元全体からなる部分空間である．これが下添字 c の意味するところである[1]．空間 $F_c(\Omega)$ に入れる位相は，$F(\Omega)$ からの誘導位相ではない．もっと細かい位相を入れて，$F_c(\Omega)$ を LF-空間にする．それには，次のようにするのである．

Ω のコンパクト集合の増大列 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_j \subseteq \cdots (\subseteq \Omega)$ であって，その合併が Ω となるものを考える．さらに各 K_j は Ω の（相対コンパクトな）開集合の閉包になっていて，K_j は K_{j+1} の内部に含まれるようにしておくのが便利である．このようなコンパクト集合の列が存在することはすでに示しておいた（補題 10.1）．こうすれば，空間 $F_c(\Omega)$ は，空間の列 $F_c(K_j)$，$j=1, 2, \cdots$ の合併と見なすことができる．これは単に，Ω の任意のコンパクト集合は十分大きな j に対する K_j に含まれる，ということにすぎない．F-空間 $F_c(K)$ の定義の仕方から，$F_c(K_{j+1})$ による $F_c(K_j)$ 上の誘導位相は $F_c(K_j)$ のもともとの位相（すなわち $F(\Omega)$ による誘導位相）と一致する．このようにして，F-空間 $F_c(K_j)$ の帰納的極限の位相を $F_c(\Omega)$ に入れる．この位相が，コンパクト集合列 $\{K_j\}$ の選び方には（その合併が Ω になる限り）依存しないことの証明は容易である．この位相によって $F_c(\Omega)$ は LF-空間になる．

記　号． F が $\mathcal{C}^k$，$\mathcal{C}^\infty$．あるいは L^p を表わすとき，$F_c(\Omega)$ はそれぞれ $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$，あるいは $L_c^p(\Omega)$ と書く．上のように定義した $F_c(\Omega)$ の位相を，**標準的 LF 位相** (canonical LF topology) という．

空間 $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ は，超関数の理論において基本的な役割をする．その各元は**テスト関数** (test function) とよばれる（それは Ω における台がコンパクトな $\mathcal{C}^\infty$ 関数である）．Ω における**超関数** (distribution) とは，標準的 LF 位相をもった関

---

1) すなわち compact の最初の文字 c である．

数空間 $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の上の連続線形汎関数に他ならない.

命題 13.2. 次のような連続単射の系列が存在する[1].

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_c^k(\Omega) \to \mathcal{C}_c^{k-1}(\Omega) \to L_c^\infty(\Omega) \qquad (0 < k < \infty),$$

$$L_c^\infty(\Omega) \to L_c^{p+1}(\Omega) \to L_c^p(\Omega) \to L_c^1(\Omega) \qquad (1 < p < \infty).$$

証 明 F, G を上に述べた型の二つの関数空間として, $F_c(\Omega) \to G_c(\Omega)$ となる連続単射の存在をいうためには, Ω の各コンパクト集合 K について, $F_c(K) \to G_c(K)$ となる連続単射の存在をいえばよい[2]. なぜなら, 命題 13.1 を利用すればよいからである. 命題は第一の系列の空間については明らかであろう. 第二の系列の方に関しては, Hölder の不等式から出る. Hölder の不等式は後に証明するが (20章), 読者には多分既知であろう. p, q を二つの実数で, $1 \leqslant p < q < +\infty$ とする. コンパクト集合 K の定義関数を χ_K と書く, すなわち K 上で 1, それ以外では 0 になる関数である. $f \in L^q, \operatorname{supp} f \subseteq K$ とする. さらに, 始めは, f は単純な型の関数, たとえば, 有界可測な階段関数とする. このとき (補題 20.1)

$$\int |f|^p\, dx = \int |f|^p \chi_K\, dx \leqslant \|f\|_{L^q}^p \|\chi_K\|_{L^r},$$

ただし $r = q/(q-p)$, を得る. したがって

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \left(\int_K dx\right)^s \|f\|_{L^q} \qquad \left(s = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \tag{13.3}$$

となる. 極限へ移ること, たとえば有界可測階段関数列の極限として, すべての $f \in L^q(K)$ について (13.3) を得るのは容易である. かくして, $f \in L^p$ なることおよび L^q から L^p への自然な単射の連続性を得る.

---

1) 各写像は自然な埋め込み写像である.

2) 一般的には, もちろん整合性の条件が必要である. すなわち $j_K : F_c(K) \to G_c(K)$ をその単射とするとき, H を Ω のコンパクト集合で $H \supseteq K$ とすれば, $j_H | F_c(K) = j_K$.

演 習 問 題

13.1. n 変数の複素係数多項式全体の空間に 161 頁で定義した LF 位相を入れたものを $\mathcal{P}_n$ であらわす．このとき，次の二つの事を証明せよ．

(a) この LF 位相は，$\mathcal{P}_n$ 上の最も細かい局所凸位相である．

(b) $\mathcal{P}_n$ から任意の TVS への線形写像は連続である．

13.2. p を正の数で，$1 \leqslant p < \infty$ とする．$\{\varepsilon_k\}(k=0,1,\cdots)$ を 0 に収束する単調減少数列，$\varepsilon_k > 0$ とする．このとき，$L_c{}^p(\mathbf{R}^n)$ の部分集合

$$\mathcal{V}^p(\{\varepsilon_k\}) = \{f \in L^p{}_c(\mathbf{R}^n)\ ;\ \int_{|x|>k} |f(x)|^p\,dx \geqslant \varepsilon_k,\ \ k=0,1,\cdots\}$$

は，数列 $\{\varepsilon_k\}$ があらゆる仕方で変わるとき，$L_c{}^p(\mathbf{R}^n)$ の LF 位相に関して 0 の基本近傍系をなすことを証明せよ (163 頁参照)．

13.3. E をノルム空間とし，そのノルムを$\|\ \|$と書く．

$k=0,1,2,\cdots$ に対して，E_k を E の k 次元部分ベクトル空間とし，$E_k \subseteq E_{k+1}$ となっているものとする．E_∞ を部分空間の列 $\{E_k\}$ の合併とし，それに $\{E_k\}$ を定義列とする LF 位相を入れる．$\{\varepsilon_k\}(k=0,1,\cdots)$ を単調減少する正項数列 $(\varepsilon_k > 0)$ で 0 に収束するものとする．このとき，

$$\mathcal{V}(\{\varepsilon_k\}) = \{x \in E_\infty\ ;\ x \notin E_k \Rightarrow \|x\| < \varepsilon_k,\ \ k=0,1,\cdots\}$$

とおけば，$\mathcal{V}(\{\varepsilon_k\})$ は E_∞ における 0 の近傍ではないことを証明せよ．

13.4. E, F を二つの LF-空間とし，$\{E_m\}, \{F_n\}(m,n=1,2,\cdots)$ をそれぞれ E, F の定義列とする (155 頁参照)．$u: E \to F$ を連続線形写像とする．このとき，Fréchet 空間は Baire 空間になるという事実を用いて，任意の m に対して n が存在して $u(E_m) \subseteq F_n$ となることを証明せよ．

13.5. $E, F, \{E_n\}, \{F_n\}$ は前問題の通りとする．u を E から F の中への [上へのとは限らない] (TVS 構造に関する) 同形写像とする．このとき，すべての n に対して m が存在して $u^{-1}(F_n) \subseteq E_m$ となることを示せ．

13.6. E をベクトル空間とする．$\{E_\alpha\}(\alpha \in A)$ を局所凸 TVS の族とし．各 α について $\phi_\alpha: E_\alpha \to E$ を線形写像とする．すべての $\phi_\alpha(\alpha \in A)$ を連続にするような E 上の最も細かい局所凸位相を $\mathcal{T}$ とする．このとき．Eの凸集合 U が $\mathcal{T}$ に関する 0 の近傍になるための必要十分条件は，すべての α について $\phi_\alpha^{-1}(U)$ が E_α における 0 の近傍になることである．これを証明せよ．U が凸集合でないならば，このことは必ずしも成り立たないことを示せ．F を局所凸 TVS とするとき，線形写像 $u: E \to F$ が連続になるための

必要十分条件は，すべての $\alpha \in A$ について $u \circ \phi_\alpha : E_\alpha \to F$ が連続になることである（E には位相 $\mathcal{T}$ を入れて考える）．これを証明せよ．

13.7. K を $\mathbf{C}^n$ のコンパクト部分集合とする．$\Omega_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ を K を含む $\mathbf{C}^n$ の開部分集合の減少列

$$\mathbf{C}^n = \Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \cdots \quad \supseteq \Omega_k \supseteq \Omega_{k+1} \supseteq \cdots$$

であって，K を含む任意の $\mathbf{C}^n$ の開集合は必ずどれかの Ω_k を含むものとする（換言すれば，$\{\Omega_k\}$ は K の近傍系の単調減少な基底である）[1]．いま，K 上の関数であって，K を含む開集合上の正則関数に延長できるものの全体を $H(K)$ で表わす．[どんな開集合上に延長できるかは，その関数に依存する.] このとき，自然な写像 $\rho_k : H(\Omega_k) \to H(K)$ として 'K への制限' がある．前問題に述べた方法を，$E = H(K)$, $A = \mathbf{N}$, $E_\alpha = H(\Omega_k)$, $\phi_\alpha = \rho_k\ (\alpha = k)$ として適用せよ．$H(K)$ は完備になること，($K = \phi$ でない限り) Frechét 空間 $H(\Omega_k)$ の狭義帰納極限にはならないことを証明せよ．

1) $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合の近傍フィルターは可算基底をもつので，このようにできる．コンパクトでなければ一般にはできない．

14.

有　界　集　合

E を TVS とする (Hausdorff とも局所凸とも限らない). 有限次元空間やノルム空間 (11 章参照) において慣れている有界集合の概念を一般化しよう.

定義 14.1. TVS E の部分集合 B が**有界** (bounded) であるとは, E における 0 の任意の近傍 U に対して, 数 $\lambda \geqslant 0$ が存在して

$$B \subseteq \lambda U$$

となることをいう.

E の部分集合 B が有界であるとは, それが 0 の任意の近傍によって **'のみ込まれる'** (swallowed) ことである, と表現してもよいであろう. もちろん, 0 の基本近傍系に属する各近傍が B をのみ込むならば, B は有界である. E の 0 の基本近傍系として, 0 の閉近傍からなるものが存在する (命題 3.1) から, "有界集合の閉包は常に有界である". 有限集合, 有限次元空間の (普通の意味の) 有界集合, ノルム空間の有限半径の球などが有界集合になるのは明らかである. また, 次の性質も明らかであろう.

(1)　有限個の有界集合の合併はまた有界である (これには, 0 の任意の近傍は, 0 の平衡的近傍を含むことを思い出せばよい)[1].

(2)　有界集合の部分集合は有界である.

---

1)　$B_1, \ldots, B_r$ を有界集合とし, U を任意の 0 の近傍, V を U に含まれる平衡的な 0 の近傍とする. 有界性の定義から, 各 $j=1,\ldots,r$ について $\lambda_j > 0$ が存在して $B_j \subseteq \lambda_j V$. $\lambda = \max_{1<j<r} \lambda_j$ とすると $B_j \subseteq \lambda_j V = \frac{\lambda_j}{\lambda} \lambda V \subseteq \lambda V$. ゆえに $\bigcup_{j=1}^{r} B_j \subseteq \lambda V \subseteq \lambda U$.

これらの諸性質は，ある意味で，一点の近傍系の諸性質に双対なものになっていることに注意しよう．そこで次の定義をする．

定義 14.2. E の有界集合の族 $\{B_\alpha\}(\alpha\in\Omega)$ が E の有界集合の一つの基底であるとは，任意の有界集合 B に対して $\alpha\in\Omega$ が存在して $B\subseteq B_\alpha$ となることをいう．

0 の近傍の基底とは，0 の近傍の族であって，任意の 0 の近傍はその族に属する近傍を含むことであった．有界集合の基底の方は，有界集合の族であって，任意の有界集合はその族に属する有界集合に含まれることをいう．後に，TVS の双対空間上の強位相を研究する際には，この近傍と有界集合の間の‘双対性’が重要な意味をもってくる．

どんな集合が有界になるか？唯一点からなる集合は有界である．これは当然期待されることであるが，実際に定義 14.1 に当てはめて見るとき，0 の任意の近傍は吸収的 (定義 3.1) であることを考慮すれば，明らかである．

命題 14.1. コンパクト集合は有界である．

K をコンパクト集合とする．U を E における近傍であって，開かつ平衡的とする．すると

$$K\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}nU=E.$$

コンパクト性から，有限個の整数 $n_1,\dots,n_r$ が存在して

$$K\subseteq n_1U\cup\cdots\cup n_rU=(\sup_{1\leq\lambda\leq r}n_\lambda)U.$$

[この最後の等号は，U が平衡的なことによる.]

有限次元空間においては，任意の有界集合は，それが閉ならば，コンパクト集合であった．このことは，無限次元 TVS においては一般に成り立たない．たとえば，E を無限次元ノルム空間とする．もし E において有界閉集合が常にコンパクトならば，特に原点中心の [半径有限の] 閉球はすべてコンパクト

になる．これは，Eが局所コンパクトであることを意味し，$\dim E=+\infty$ ならば不可能である（定理 9.2）．しかしながら，無限次元位相ベクトル空間の一つの重要な部類．いわゆる **Montel 空間** (Montel space) とよばれるものにおいては，有界閉集合はすべてコンパクトになる．後に，双対性と関連して，Montel 空間を研究することになる．空間 $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{S}\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ は Montel 空間である（定理 14.4, 演習問題 14.9, 14.10; 182 頁）．

系 1. Eを Hausdorff とすれば，Eのプレコンパクト集合は有界である[1]．

KをEのプレコンパクト集合とする．Eの完備化$\hat{E}$におけるKの閉包を$\hat{K}$とする．$\hat{K}$はコンパクトになる．いまUをEにおける 0 の任意の近傍とすると，単射 $E\to\hat{E}$ は TVS 構造の同形写像だから，$\hat{E}$における 0 の近傍$\hat{U}$が存在して，$U=E\cap\hat{U}$となる．命題 14.1 により，$\lambda>0$ が存在して，$\hat{K}\subseteq\lambda\hat{U}$．したがって，

$$K\subseteq E\cap\hat{K}\subseteq E\cap(\lambda\hat{U})\subseteq\lambda(E\cap\hat{U})=\lambda U.$$ [2]

系 2. Eを Hausdorff とする[3]．Eにおける収束列にその極限を合併したものは有界集合である．

なぜなら，この合併はコンパクトだからよい．

系 3. Eを Hausdorff とする[3]．Eにおける任意の Cauchy 列は有界である．

---

1) Hausdorff という仮定がなくても，プレコンパクト集合は常に有界である．Uを任意の 0 の近傍，Vを平衡的な 0 の近傍で $V+V\subseteq U$ なるものとする．いまKをプレコンパクト集合とすると，有限個の点 $x_1,\dots,x_r$ があって，$K\subseteq\bigcup_{j=1}^{r}(x_j+V)$（命題 6.9）．$V$は吸収的だから，$\lambda_j$ $j=1,\dots,r$ があって，$x_j\in\lambda_j V$．そこで $\lambda=\max\{\lambda_1,\dots,\lambda_r,1\}$ とおけば，$\lambda_j V\subseteq\lambda V$ かつ $V\subseteq\lambda V$（ここでVの平衡性を用いた）．ゆえに，任意のjについて $x_j+V\subseteq\lambda_j V+V\subseteq\lambda V+\lambda V=\lambda(V+V)\subseteq\lambda U$．ゆえに，$K\subseteq\lambda U$．

2) この証明は，Hausdorff の仮定の下では脚注のより短かい．

3) Hausdorff の仮定は不要．脚注 1) 参照．

Cauchy 列はプレコンパクトだからよい．

Cauchy 列に付随する Cauchy フィルターは有界集合を含む．しかし，これは一般の Cauchy フィルターについては成り立たない．[たとえば，テスト関数の空間の原点の近傍フィルター．]

命題 14.2. 連続線形写像による有界集合の像は常に有界である．

E, F を二つの TVS とし，u を E から F への連続線形写像とする．B を E の有界集合とし，V を F における 0 の任意の近傍とする．u による V の逆像 $u^{-1}(V)$ は E における 0 の近傍だから，$\lambda > 0$ が存在して $B \subseteq \lambda u^{-1}(V)$．これから，$u(B) \subseteq \lambda V$ を得る．

系． f を E 上の連続線形汎関数とする．B を E の有界集合とすれば，f は B 上で有界である．すなわち，

$$\sup_{x \in B} |f(x)| < +\infty.$$

命題 14.3. E を任意の TVS とする．E の部分集合 B が有界であるための必要十分条件は，B に含まれる任意の点列が (E において) 有界になることである．

必要性は明らか．十分性を証明する．B を有界でないと仮定しよう．このとき，B が有界でない点列を含むことをいうとよい．B は**非有界** (unbounded) だから，E の 0 の近傍 U が存在して，U は B をのみ込まない (U は平衡的としてよい)．すなわち，すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $x_n \in B$ が存在して，x_n は nU に属さない．この点列 $\{x_n\}$ は，あきらかに有界になり得ない．

ノルム空間において，任意の [半径有界の] 球は有界集合である．すなわち，ノルム空間には有界であると同時に 0 の近傍になる集合が存在する．この性質は，少なくとも Hausdorff 局所凸空間の枠内で，可ノルム空間の特徴である．

命題 14.4. Eを Hausdorff 局所凸空間とする．もしEにおける0の近傍で有界なものがあれば，Eは可ノルム空間である．

UをEにおける0の有界な近傍とする．Uは0の樽近傍を含むから，はじめからUは樽であると仮定してよい．このとき，$\{(1/n)U\}(n=1,2,\ldots)$がEの0の基本近傍系になる．実際，Vを0の任意の近傍とする．Vは平衡的としてよい．VはUをのみ込むから，整数$n>0$が存在して$U\subseteq nV$．すなわち$(1/n)U\subseteq V$．Eは Hausdorff だから，集合$(1/n)U$ $(n=1,2,\ldots)$の共通部分は$\{0\}$となる．これは，Uに付随するセミノルム[Uのゲージ]がノルムになることを意味する．(証終).

命題 14.5. Eを局所凸空間とする．Eの部分集合Bが有界であるための必要十分条件は，Eの一つの連続セミノルム基底に属するすべてのセミノルムがB上で有界になることである．

セミノルムpが集合B上で有界とは，$\sup_{x\in B}p(x)<+\infty$を意味する．この命題の証明は読者にまかせる．

命題 14.6. EをLF-空間とし$\{E_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$をその定義列とする(定義 12.1 参照)．Eの部分集合BがEにおいて有界であるための必要十分条件は，十分大きいnに対してBがE_nに含まれて，BがF-空間E_nにおいて有界になることである．

証 明 まず，Bが一つのE_nに含まれ，そこで有界であると仮定しよう．UをEにおける0の任意の近傍とする．$U_n=U\cap E_n$はE_nにおける0の近傍だから，数$\lambda>0$が存在して$B\subseteq\lambda U_n\subseteq\lambda U$.

今度はBがEにおいて有界とする．Bがどれか一つのE_nに含まれることを示さねばならない．そこで，そうでないと仮定して矛盾に導く．BがどのE_nにも含まれなければ，各nについて$x_n\in B, x_n\notin E_n$となる点x_nが存在する．補題 13.1 を用いて，Eにおける0の近傍Uであって，点列$\{x_n\}$を呑み込まな

いものを構成しよう．そうすれば，もちろん U は B を呑み込まない．さて，$x_1 \notin E_1$ だから，E_1 における 0 の任意の凸近傍 U_1 に対して，E_2 における 0 の凸近傍 U_2 が存在して

$$U_1 = U_2 \cap E, \quad x_1 \notin U_2$$

E_3 は x_1 を含むかもしれないが，$x_1 \notin U_2$ だから補題 13.1 によって，E_3 における 0 の凸近傍 V_3' が存在して

$$U_2 = V_3' \cap E_2, \quad x_1 \notin V_3'$$

となる．他方，$x_2 \notin E_2$ だから，$2x_2 \notin E_2$，したがって E_3 における 0 の凸近傍 V_3 が存在して

$$U_2 = V_3 \cap E_2, \quad 2x_2 \notin V_3$$

そこで $U_3 = V_3 \cap V_3'$ とおけば，

$$U_2 = U_3 \cap E_2, \quad x_1, 2x_2 \notin U_3$$

となる．このようにして，n に関する帰納法により，集合列 $\{U_n\}$ を次の性質をもつように構成できる．

U_n は E_n における 0 の凸近傍である；

$U_n = U_{n+1} \cap E_n$;

点 $x_1, 2x_2, \ldots, nx_n$ は U_{n+1} に属さない．

そして，これらの集合 U_n の合併を U とする．各 n について $U \cap E_n = U_n$ だから，U は E における 0 の近傍になる．また，明らかに，U は点列 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ を呑み込めない．

これは，E における有界集合 B は十分大きい n に対して E_n に含まれてしまうことを示している．U_n を E_n における 0 の任意の凸近傍とする．再び補題 13.1 を用いると，E における 0 の近傍 U が存在して $U \cap E_n \subseteq U_n$．仮定によって，$\lambda > 0$ が存在して $B \subseteq \lambda U$．これから，

$$B = B \cap E_n \subseteq (\lambda U) \cap E_n = \lambda(U \cap E_n) \subseteq \lambda U_n.$$

かくして，B は E_n において有界である．(証終).

系 1. E と E_n を命題 14.6 の通りとする．E における点列 $\{x_k\}$ が E におい

て収束するための必要十分条件は，この点列が一定の E_n に含まれ，そこで収束することである.

演 習 問 題

14.0. E を距離付け可能な局所凸空間とする．もし E が可ノルムでないならば，E には有界集合の可算基底が存在しないことを証明せよ．

14.1 Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合，$K_1, K_2 \ldots, K_\nu, \ldots$ を Ω のコンパクト集合であって，その合併が Ω になり，各 ν について K_ν は $K_{\nu+1}$ の内部に含まれるものとする．k を非負整数とする ($k < +\infty$)．数列 $\{M_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), $M_\nu \geqslant 0$ があらゆる仕方で変ったとき，集合

$$B_k(\{M_\nu\}) = \{\phi \in \mathcal{C}^k(\Omega); \sup_{|p| \leqslant k}(\sup_{x \in k_\nu} |(\partial/\partial x)^p \phi(x)| \leqslant M_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots\}$$

は，$\mathcal{C}^k(\Omega)$ における有界集合の基底をなすことである．これを証明せよ．このことから，(Ω が空集合でない限り) $\mathcal{C}^k(\Omega)$ は可ノルムでないことを導け．

14.2. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の部分集合 B が有界であるための必要十分条件は，それが各 k について ($k < +\infty$) $\mathcal{C}^k(\Omega)$ の中で有界であることである．これを証明せよ．このことから，前問題におけると同様のコンパクト集合列 $\{K_\nu\}$ を用いて，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の有界集合の基底を作れ．

14.3. $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ ($0 \leqslant k \leqslant +\infty$) の部分集合 B が有界であるための必要十分条件は，B に属する関数の台がすべて一定のコンパクト集合 $K(K \subseteq \Omega)$ に含まれ，B が $\mathcal{C}^k(\Omega)$ において有界なことである．これを証明せよ．k が有限のときには，$\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ には有界集合の可算基底が存在することを示せ．これを $\mathcal{C}^k(\Omega)$ の場合と比較せよ．

14.4. 次の各々の局所凸 TVS において，有界集合の基底を作って見よ．$\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の正則関数の空間 $H(\Omega)$(10 章, 例 II); 形式的巾級数の空間 $\mathbf{C}[[X]]$ (10 章, 例 III); 無限遠で急減少する $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{S}$ (10 章例 IV).

n 変数の複素係数多項式の空間 $\mathbf{C}[X]$ の部分集合 B が有界であるための必要十分条件は，B に属する多項式の次数がすべて一定の整数 m 以下であり，B が $\mathbf{C}[[X]]$ において有界なことである．これを証明せよ．

14.5. 次の命題を証明せよ．

命題 14.7. E を LF-空間とする．E から一つの局所凸空間への線形写像 u が連続であるための必要十分条件は，u が列的に連続なことである．
(命題 8.5 参照)

14.6. E を LF-空間であって，有限次元 (Fréchet) 空間から成る定義列 $\{E_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) をもつものとする．このとき，次のことを証明せよ．

(*a*) Fをノルム空間, $u:F\to E$を連続線形写像とすれば, $\mathrm{Ker}\,u$は有限余次元である (すなわち, $\dim(F/\mathrm{Ker}\,u)<+\infty$).

(*b*) MをEの部分ベクトル空間であって, Eからの誘導位相によって可ノルムなものとすれば, $\dim M<+\infty$.

14.7. Eを距離付け可能な空間, $\{B_k\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$をEの有界集合列とする. このとき, 数列$\{\varepsilon_k\}, \varepsilon_k>0$が存在して, 合併集合

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k B_k$$

がEにおいて有界になる. これを証明せよ.

E,Fを二つのTVSとし, uをEからFへの線形写像とする. このとき, uが**有界** (bounded) であるとは, Eの各有界集合Bに対して, $u(B)$がFの有界集合になるときにいう.

命題 14.8. Eを距離付け可能なTVS, FをTVSとする. このとき, EからFへの有界線形写像は常に連続になる.

$f:E\to F$を有界線形写像とする. fが連続でないと仮定して見よう. すると, Fにおける0の近傍Vが存在して, その逆像$f^{-1}(V)$はEにおいて0の近傍にならない. Vは平衡的としてよい. $U_1\supseteq U_2\supseteq\cdots\supseteq U_m\supseteq\cdots$を$E$における単調減少な0の可算近傍基底とする. $f^{-1}(V)$は0の近傍でないから, すべてのmについて

$$\frac{1}{m}U_m\nsubseteq f^{-1}(V).$$

換言すれば, $x_m\in(1/m)U_m$が存在して$f(x_m)\notin V$. $mx_m\in U_m$だから, 点列$\{mx_m\}$はEにおいて0に収束する. したがってとくに$\{mx_m\}$は有界集合である. uは有界写像だから, $\{mf(x_m)\}$はFにおいて有界である. これは, 正数ρが存在して, すべてのmについて$mf(x_m)\in\rho V$となることを意味する. そこでmを$m\geqslant\rho$なるようにとれば, Vは平衡的だったから

$$f(x_m)\in\frac{\rho}{m}V\subseteq V.$$

これは仮定に反する. これで矛盾に出会った. (証終).

系. Fréchet 空間 (またはノルム空間, LF-空間) からもう一つの TVS への有界線形写像は連続である.

Fréchet 空間とノルム空間の場合は命題14.8からの自明な帰結である. LF-空間の場合は, 命題13.1および14.6と組合せるとよい.

ここで, 連続線形写像は常に有界であったことを思い出しておこう (命題14.2).

さて, 空間 $\mathcal{C}^\infty(\Omega), \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (Ω:$\mathbf{R}^n$ の開集合) および $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ においては, 有界な閉集合はすべてコンパクトになる事を証明しよう. 証明は **Ascoli の定理** (Ascoli's theorem) を基礎にする. この定理を復習しよう. まずはじめに, 関数の**同等連続** (equicontinuous) な集合の概念を導入する.

定義 14.3. X を位相空間, F を TVS, x^0 を F の一点とする. X から F への写像の集合 S が, 点 x^0 において**同等連続**であるとは, F における 0 の任意の近傍 V に対して, X における x^0 の近傍 $U(x^0)$ が存在して, すべての $f\in S$ について

$$x\in U(x^0) \quad ならば \quad f(x)-f(x^0)\in V$$

となることをいう.

定義14.3の条件から各 $f\in S$ が x^0 において連続になることがわかる (しかし, もちろんこのことだけから x^0 における S の同等連続性は出ない).

写像 $f: X\to F$ の集合が, X の部分集合 A 上で同等連続であることの定義や, **一様に同等連続** (uniformly equicontinuous) であることの定義などは明らかであろう[1]. さて, X がコンパクト空間ならば, X から F への写像の集合 S が X の各点で同等連続とすれば一様に同等連続になる (コンパクト空間は標

1) 念のために述べておくならば, X から F への写像の族 S が集合 A 上で同等連続とは, A の各点において同等連続なことをいう. また, '一様に同等連続' とは, X も一つの TVS E の部分集合である場合についていえば, F における任意の 0 の近傍 V に対して, E における 0 の近傍 U が存在して, すべての $f\in S$ について

$$x, y\in X, x-y\in U \quad ならば \quad f(x)-f(y)\in V$$

となることをいう.

準的な**一様構造** (uniform structure) をもつ; 一様構造[1] の話をさけたければ, X は一つの TVS のコンパクト集合の場合だけを考えておけばよい[2]. この章では, TVS E から TVS F への線形写像の同等連続集合を取り扱うことはしない. しかし (将来のために) 注意しておくならば, 線形写像の集合が各点で同等連続さらには一様に同等連続になるための必要十分条件は, それが原点で同等連続なことである. その線形写像の集合を S と書けば, 同等連続性は次のようになる: F の任意の 0 の近傍 V に対して, E の 0 の近傍 U が存在して, すべての $f \in S$ について

$$f(U) \subseteq V, \quad \text{あるいは} \quad U \subseteq f^{-1}(V)$$

となる.

さて, 話を (必ずしも線形とは限らない) 複素数値関数の場合に変えよう. 写像 $f: X \to \mathbf{C}$ の集合 S が点 x^0 において同等連続になるのは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, X における x^0 の近傍 $U(x^0)$ が存在して, すべての $f \in S$ について

$$x \in U(x^0) \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$$

となるときである.

そこで **Ascoli の定理**を述べて証明しよう.

定理 14.1. $\{f_n\}$ を, $\mathbf{R}^d$ のコンパクト集合 K 上で定義された連続関数の列とする. 次の仮定をおく.

(a) 関数の集合 $\{f_n\}$ は K 上で同等連続である.

(b) 定数 $M < +\infty$ が存在して, すべての n とすべての $x \in K$ について

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

このとき, 列 $\{f_n\}$ は, K 上で一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ を含む.

証 明 $\varepsilon > 0$ を任意にあたえたとする. 仮定によって, K の各点 x^0 に対して $\eta(x^0) > 0$ が存在して, すべての n について

---

1) たとえば N. Bourbaki : Topologie générale, Chap. II 参照

2) 前頁脚注参照

$$|x-x^0| \leqslant \eta(x^0) \quad ならば \quad |f_n(x)-f_n(x^0)| \leqslant \varepsilon.$$

K のコンパクト性から，$\eta(x^0)$ は x^0 に依存しないようにとることできる（このことは定理 14.1 の前に注意した．すなわち，コンパクト集合上では，各点における同等連続性から一様同等連続性が出る）．そこで，$\eta(x^0)$ の代りに η と書く．

K の有限個の点 $x^1,\dots,x^m$ を選んで，m 個の球 $\{x \in \mathbf{R}^d\,;\,|x-x^j| \leqslant \eta\}$ $(j=1,\dots,m)$ が K を覆うようにする．まず最初に x^1 に注目して，複素数列 $\{f_n(x^1)\}$ を考える．仮定 (b) によって，この数列は複素平面上の円板 $\{z\,;\,|z| \leqslant M\}$ に含まれ，したがって Weierstrass–Bolzano の定理によって，収束する部分列を含む．その部分列を $\{f_{n_\lambda}(x^1)\}$，$\lambda=1,2,\dots$ とする．次に，点 x^2 において同じ議論を繰返す．ただし，関数列 $\{f_n\}$ の代りに $\{f_{n_\lambda}\}$ を考える．そうしても議論が同様に進むことは明らかである．実際，条件 (a), (b) は，$\{f_n\}$ をその部分列でおきかえても成り立つからである．かくして，$\{f_{n_\lambda}\}$ の部分列 $\{f_{n_{\lambda_k}}\}$ を選んで $\{f_{n_{\lambda_k}}(x^2)\}$ が収束するようにできる．これを m 回繰り返せば，もとの関数列 $\{f_n\}$ の部分列として次の性質をもつもの S' を得る．すなわち，簡単のために $S'=\{g_n\}$ とかくならば，すべての $j=1,\dots,m$ について，数列 $\{g_n(x^1)\}$ が収束する．整数 $N(\varepsilon)$ を十分大きくとって，$n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$ ならば，任意の j，$1 \leqslant j \leqslant m$ に対して

$$|g_{n_1}(x^j)|-g_{n_2}(x^j)| \leqslant \varepsilon$$

となるようにする．

さて，x を K の任意の点としよう．x に対して j が存在して $|x-x^j|<\eta$ となるから，$n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$ ならば

$$|g_{n_1}(x)-g_{n_2}(x)| \leqslant |g_{n_1}(x)-g_{n_1}(x^j)|+ |g_{n_1}(x^j)-g_{n_2}(x^j)|+|g_{n_2}(x^j)-g_{n_2}(x)| \leqslant 3\varepsilon.$$

関数列 $\{g_{N(\varepsilon)}, g_{N(\varepsilon)+1)},\dots\}$ のこの性質を見れば，ε の代りに $\varepsilon/3$ とすることによって，結局次のことを証明したことになる．

(14.1)　コンパクト集合 K の上で定義された関数列

$S=\{f_n\}$ が定理 14.1 の条件 (a), (b) をみたすとすれば，任意の $\varepsilon>0$

に対して S の部分列 S' が存在して，すべての $f_{n_1}, f_{n_2} \in S'$ について

$$\sup_{x \in k} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leqslant \varepsilon$$

となる.

このことから定理 14.1 を証明するのは容易である．実際 $\varepsilon = 1$ として S に (14.1) を適用して得られた部分列を S_1 とする．次に $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ として S_1 に(14.1) を適用して，部分列 S_2 を得る,… . このようにして帰納法により，部分列の減少列

$$S = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_p \supseteq S_{p+1} \supseteq \cdots$$

を得て，$f_{n_1}, f_{n_2} \in S_p$ ならば

$$\sup_{x \in K} |f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leqslant 2^{-p}$$

となるようにできる．そこで任意に，f_{n_0} を S_0 から f_{n_1} を S_1 から,…, f_{n_p} を S_p から,… と取ってくれば，関数列 $\{f_{n_k}\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ は明らかに K 上の一様収束に関する Cauchy 列となり，したがって一つの連続関数に一様収束する. (証終).

注意 14.1. K 上の連続関数全体に一様収束の位相を入れた Banach 空間を $\mathscr{C}(K)$ とする．すなわち，ノルムは

$$f \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|$$

とする．Ascoli の定理の述べていることは，$\mathscr{C}(K)$ の部分集合が “有界かつ同等連続ならば，その閉包がコンパクトになる” ということである.

Ascoli の定理の逆もまた成り立つ．すなわち，$\mathscr{C}(K)$ の部分集合が，“もしその閉包がコンパクトならば，それは有界かつ同等連続になる”．しかしこれは利用しない.

次に同等連続性の判定法を述べよう．これは Arzelà の定理とよばれるものである．$\mathscr{C}(K)$ の任意の有界集合があたえられたとき，それがコンパクトであると結論することはもちろんできない (もしできるとすれば，$\mathscr{C}(K)$ の閉単位球がコンパクト，したがって $\mathscr{C}(K)$ は局所コンパクトになり，有限次元というこ

とになってしまう!). しかしながら, K 上の関数の一つの集合 S があたえられたとき, それが (絶対値の最大値に関して) 有界であり, さらに S の各関数が連続な一階偏導関数をもっていて, それらが一つの有限な定数によって一様に押えられているならば, 集合 S は同等連続であると結論することができる. したがって, このときには S は $\mathscr{C}(K)$ において相対コンパクトである ("相対コンパクト" とは "コンパクトな閉包をもつ" を意味する). ところで, これはもっと正確に述べる必要がある. 実際, コンパクト集合 K で定義された関数 f が連続な一階偏導関数をもつとはどういう意味であろうか. 意味をあたえるために, K は $\mathbf{R}^n$ の一つの有界開集合 Ω に含まれていると仮定しよう. ここで, 11 章 (例 III 121 頁) で導入した空間 $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ が重要になる. これは Ω 上の一回連続的微分可能な関数であってその 0 階および 1 階導関数が Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ にまで連続関数として拡張できるようなもの全体のなす空間である. この空間 $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ にはノルムとして

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in\Omega}(\sup(|f(x)|, \sup_{j=1,\cdots,n}|(\partial/\partial x_j)f(x)|))$$

あるいは他の同等なノルム, たとえば

$$f \mapsto \sup_{x\in\Omega}\left(|f(x)| + \sum_{j=1}^{n}|(\partial/\partial x_j)f(x)|\right)$$

を入れて考える. これらのどのノルムに関しても $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ は B-空間になる. さて, **Arzelà の定理**を述べよう.

定理 14.2. K を $\mathbf{R}^n$ の有界開集合 Ω のコンパクト部分集合とする. このとき, Ω 上の関数に対してその K への制限を対応させる制限写像 $f \mapsto f|K$ は, $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ の有界集合を $\mathscr{C}(K)$ の相対コンパクト集合に写す.
("相対コンパクト" は "その閉包がコンパクト" を意味する).

証　明　Ascoli の定理 (定理 14.1) によって, $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ の有界集合の K への制限が K 上の関数の同等連続な集合になることを示せば十分である (それが $\mathscr{C}(K)$ において有界なことは明らか, 命題 14.2). 実際には [$\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ の有界集合として

は] $\mathcal{E}^1(\bar{\Omega})$ の原点中心の球だけを考えればよい.

f を $\mathcal{E}^1(\bar{\Omega})$ に属する関数とする. 1次の Taylor 展開からただちにわかるように各 $x_0 \in \Omega$ に対して, $\rho(x_0) > 0$ が存在して, $|x-x_0| \leqslant \rho(x_0)$ ならば $x \in \Omega$ かつ

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \sup_{y \in \Omega} \left(\sup_{j=1,\cdots,n} |(\partial/\partial x_j)f(y)| \right) |x-x_0| \leqslant \|f\|_1 |x-x_0|.$$

これは明らかに, $\mathcal{E}^1(\bar{\Omega})$ の原点を中心とする任意の (有限半径) の球は Ω で (すなわち Ω の各点において) 同等連続な集合であることを示している. したがって, 制限写像によるそのような球の像もまた K 上の同等連続な関数の集合になる. (証終).

演習問題 14.8. Arzelà の定理の一次元の場合である次の定理を直接に, または定理 14.2 を用いて証明せよ.

定理 14.3. $[a,b]$ を実直線上の有界閉区間とし, S を $\mathcal{E}^1([a,b])$ の有界集合とする. このとき S は $\mathcal{E}([a,b])$ において相対コンパクトである.

さて, 予告してあった諸結果 [169 頁][1] の最初のものを証明しよう (残りは全てこの最初のものから導くことができる).

定理 14.4. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする, $k < +\infty$ のときには, $\mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$ の任意の有界集合は $\mathcal{E}^k(\Omega)$ において相対コンパクトになる. $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ の有界集合はすべて $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において相対コンパクトである.

証　明　通例のように, $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_j \subset \cdots$ を Ω のコンパクト集合の列であって, その合併が Ω, 各 K_j はその内部 Ω_j の閉包に等しく, すべての j について $K_j \subseteq \Omega_{j+1}$ となるものとする. 考えている空間はすべて F-空間だから, 任意の有界列が収束する部分列を含むことをいえばよい (命題 8.4). まず k が有限の場合の考察から始める.

---

1) $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ がすべて Montel 空間であること.

S を $\mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$ の有界列とする．これは，$|p| \leqslant k$ となるすべての n-系 p について，関数列

$$(\partial/\partial x)^p f, \qquad f \in S$$

が $\mathcal{E}^1(\bar{\Omega}_j)$ において有界なことを意味する．$j \geqslant 1$ とすれば，Arzelà の定理により，S の部分列 S_1 が存在して，制限

(14.2) $$(\partial/\partial x)^p f \,|\, \Omega_{j-1}, \qquad f \in S_1$$

は $\mathcal{E}^0(\bar{\Omega}_{j-1})$ で収束する（このこと [S_1 の存在] を見るには，$|p| \leqslant k$ となる n-系 p 全体に勝手な仕方で順序をつけておいて，まず S の部分列 $S_{1,1}$ を，制限 (14.2) で f が $S_{1,1}$ を動くとき一番目の n-系 p について (14.2) が $\mathcal{E}^0(\bar{\Omega}_{j-1})$ において収束するように選ぶ．次に $S_{1,1}$ の部分列 $S_{1,2}$ を，制限 (14.2) において f が $S_{1,2}$ を動くとき二番目の n-系 p について (14.2) が $\mathcal{E}^0(\bar{\Omega}_{j-1})$ で収束するように選ぶ．以下同様に進めば，有限回で部分列 S_1 を得る）．これからただちに，標準的な議論 ((10.2) と (10.3) を基礎とする；108 頁) によって，$p=0$ の場合の (14.2) の $\mathcal{E}^0(\bar{\Omega}_{j-1})$ における極限を f^0 とすれば．各 p, $|p| \leqslant k$ について (14.2) の $\mathcal{E}^0(\bar{\Omega}_{j-1})$ における極限は $(\partial/\partial x)^p f^0$ に等しいことがわかる．換言すれば，列 S_1 は $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_{j-1})$ において収束する．かくして次のことが証明できた．

(14.3) 任意の $j \geqslant 1$ と $\mathcal{E}^{k+1}(\bar{\Omega}_j)$ の任意の有界列 S に対して，S の部分列 S_1 が存在して，関数 $f \in S_1$ の Ω_{j-1} への制限は $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_{j-1})$ において収束列をなす．

さて，S を $\mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$ の有界列とする．Ω_1 へ制限することによって，それは $\mathcal{E}^{k+1}(\bar{\Omega}_1)$ の有界列 $S|\Omega_1$ となる．(14.3) により，S の部分列 S_1 が存在して，その Ω_0 への制限 $S_1|\Omega_0$ は $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_0)$ で収束する．ところで S_1 は $\mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$ で有界だから，Ω_2 に制限すれば $\mathcal{E}^{k+1}(\bar{\Omega}_2)$ の有界列となる．(14.3) により S_1 の部分列 S_2 が存在して $S_2|\Omega_1$ は $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_2)$ で収束する．以下同様．このようにして関数列の全順序列

$$S = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_j \supseteq \cdots$$

を得るが，各 $j \geqslant 1$ について $S_j|\Omega_{j-1}$ は $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_{j-1})$ で収束する．各 $j \geqslant 1$ について列 $S_j|\Omega_{j-1}$ の $\mathcal{E}^k(\bar{\Omega}_{j-1})$ における極限を f^j としよう．これに対して S_j の元 f_j

が存在して

$$\sup_{|p|<k}\sup_{x\in\Omega_{j-1}}|(\partial/\partial x)^p(f_j-f^j)|\leqslant 1/j$$

となる. 列 $S'=\{f_1,f_2,\dots,f_j,\dots\}$ は明らかに $\mathcal{E}^k(\Omega)$ において収束する. その極限は Ω 上の関数 f であって, 各 j について f の Ω_{j-1} への制限は f^j に一致する. また $S'\subseteq S$ は明らか. かくして k が有限の場合は証明された.

今度は S を $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ の有界列としよう, ゆえにもちろん S は各 $\mathcal{E}^k(\Omega), k=1, 2,\cdots$ において有界になる. したがって S は各 $\mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ において相対コンパクトである. そこで S_0 を S_1 の部分列で $\mathcal{E}^0(\Omega)$ において収束するものとしよう (演習問題8.7参照). その極限を f とする. 次に S_0 の部分列 S_1 を選んで $\mathcal{E}^1(\Omega)$ で収束するようにする. S_1 の極限はもちろん f に等しくなければならない (したがって f は $\mathcal{E}^1$ である). S_1 の部分列 S_2 を選んで $\mathcal{E}^2(\Omega)$ で収束するようにする (その極限も f). 以下同様. かくして f は Ω において $\mathcal{E}^\infty$ であり, 関数列の列

$$S=S_0\supseteq S_1\supseteq S_2\supseteq\cdots\supseteq S_j\supseteq\cdots$$

を得るが, 今回は各 $j\geqslant 0$ について S_j が f に $\mathcal{E}^j(\Omega)$ において収束するという性質をもつ. そこで各 j について $f_j\in S_j$ を

$$\sup_{|p|<j}(\sup_{x\in\Omega_j}|(\partial/\partial x)^p(f_j-f)(x)|)\leqslant 1/j$$

となるように取れば, S の部分列 $\{f_1,f_2,\dots,f_j,\dots\}$ は明らかに $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において f に収束する. (証終).

演　習　問　題

14.9. 次に述べる定理14.4の二つの系を証明せよ.

系 1. $C_c^{k+1}(\Omega)$, $0\leqslant k<+\infty$ (13章例II) の任意の有界集合は $\mathcal{E}_c^k(\Omega)$ において相対コンパクトである.

系 2. $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ の任意の閉有界集合は ($\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ において) コンパクトである.

14.10. 無限遠で急速に減少する $\mathcal{E}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{S}$ に対して定理14.4 (あるいはその系2) に相当する次の定理を証明せよ.

定理 14.5. $\mathscr{S}$ の任意の閉有界集合はコンパクトである.

最後に. 複素 n–空間の開集合 Ω 上の正則関数の空間 $H(\Omega)$ (10 章例 II, 110頁) を考えよう. TVS $H(\Omega)$ の位相は Ω の各コンパクト集合上の一様収束の位相である. $\mathbf{C}^n$ と $\mathbf{R}^{2n}$ を標準的写像

$$(x_1+iy_1, \dots, x_n+iy_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

によって同一視することにより, $H(\Omega)$ を $\mathscr{E}^k(\Omega)$ ($0 \leqslant k \leqslant \infty$) の部分空間と見なす. $H(\Omega)$ 上ではすべての $\mathscr{E}^k$ 位相は一致する. (10 章例 II 参照). 特にそれらはすべて $\mathscr{E}^\infty$ 位相と一致する. $H(\Omega)$ は $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ の閉部分空間である. $H(\Omega)$ の固有の位相は $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ からの誘導位相と一致している. さて, B を $H(\Omega)$ の閉有界集合としよう. B は $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ においても閉かつ有界となるから, それはコンパクトである (それがどこでコンパクトになるか —— $H(\Omega)$ においてか $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ においてか —— ということは問題でない！). かくして次の **Montel の定理**が証明された.

定理 14.6. $H(\Omega)$ の任意の閉有界集合はコンパクトである.

15.

関数空間における近似の手法

解析学のそもそもの始め以来，“悪い”関数をどうしても取り扱わねばならないときには，それを“良い”関数で近似して，その近似を通じて調べるのが解析学者の常套手段である．関心を惹く一つの事柄が，良い近似関数のすべてについて成り立つときに，それが極限関数についても成り立つかどうかを見るのである． もちろん，“悪い”関数の概念は時代と共に進化してきた．“良い”関数の範囲は常に増大した (それと共に，“悪い”と考えられる関数，もっと一般に“関数的なもの”の範囲も増大してきた)．Taylor や Mac Laurin にとっては，解析関数がすでに感じの悪いものだったと想像される．それが彼等に多項式による近似を考えさせた理由でもあったろう．しかし，われわれにとっては，局所的観点から見る限り，解析関数はもっとも良い型の関数と見なすことができる (もちろん多項式の次にである；多項式は特別に良いと見る)．それから，微分不可能な連続関数，単に可測なだけの関数などは“悪い”と見なされた (現在でもそうである)．近似の技巧はこれらの関数をとりあつかうために案出されたのである (たとえば，階段関数による近似)．第 II 部でみるように，関数がもはや関数ではあり得なくなるほどに悪くなることもある[1]．それらは，Dirac の“関数”や測度になり，超関数の理論では，測度の任意階数の導関数を取り扱うことになる．これらのどの場合においても，これらの対象物を非常に滑らかな関数で近似する方法を知っていれば大変便利である．滑らかさというとき，われわれはそれを局所的な面からしか取り扱わない．しかし，忘れて

1) すなわち，単に“関数的なもの”になる．

はならない大域的な面もある．たとえば，積分

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)g(x)\,dx$$

を考える．f, g は局所的には良いとする．“良い”というのは，ここでは可積分であることとする．ところで，g は無限遠でいくらでも速く増大してよいとしよう．そうすれば，f は無限遠において任意に速く減少しなければならない．すなわち，f はある有界集合の外で0にならねばならない．同様の大域的な要請から，“悪い”関数，測度，超関数などを，コンパクトな台をもつ滑らかな関数で近似することを学ばねばならないことになる．もちろん，大域的な面と局所的な面とを合せ考えれば，最良の局所的性質をもち，最良の大域所性質をもつ関数による近似が望ましいであろう．たとえば，コンパクトな台をもつ解析関数による近似ができるならば最上であろう．しかし，自然はそれを禁じている．なぜなら，コンパクトな台をもつ解析関数は恒等的に0になるからである実際，そのような関数はコンパクト集合の外では0であり，したがって開集合で0になるから，いたるところ0にならねばならない！このようにして，二つの観点［局所的と大域的と］は別々に扱わねばならないことになる（しかしなるべく両方の要請をみたすように心掛ける）．そこで，無限遠での減少の次数が高い解析関数による近似やコンパクトな台をもつ十分に滑らかな関数（たとえば $\mathscr{C}^\infty$ 関数）による近似などを行なう．

近似の手法の有用性にはもう一つの理由がある．それは基本的重要性をもった理由である．解析学者の取り扱う対象物は，大抵の場合，位相ベクトル空間の元である．関数の場合ならば，関数空間の元であり，また関数空間の双対空間の元のこともある．実際，後者すなわち双対空間は実りの多い場合が大きい．一般的にいって，関数空間は，他の関数空間の双対空間に埋め込むことができる．そこで，これらの関数空間および双対空間の相互の関係が問題となる．E, F を TVS とし，E', F' をそれぞれの双対空間とするとき，包含関係 $E' \subseteq F'$ が成り立つのはどのような場合であるかを知ることは重要である．もっと正確にいえば，E と F にどのような関係があるときに，そのような双対空間の包

含関係が成り立つかということである．よく用いられる判定条件は，次のものである：次の諸条件がみたされるとき，E' は F' の部分ベクトル空間とみなすことができる．

(1) ベクトル空間として，F は E の部分空間とみなすことができる．

(2) F は E の稠密な部分集合である．

(3) F の位相は，E から導かれる位相よりも細かい．

実際，E 上の任意の連続線形形式は，それを F 上に制限するとき，(1) と (3) によって，F 上の連続線形形式を定義する．また，E 上の二つの連続線形形式が F 上で同一の線形形式になったとすれば，(2) によって，E 上到るところで一致する．すなわち E 上の線形形式として等しい．このようにして，E 上の一つの連続線形形式には，F 上唯一つの連続線形形式が対応する．これが包含関係 $E' \subseteq F'$ の意味である．さて，条件 (1) と (3) は，E と F の定義およびそれらの位相の定義から明らかにわかるのが常である (たとえば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^k(\Omega)$ は明らかであり，$\mathcal{C}^\infty$ 位相が $\mathcal{C}^k$ 位相より細かいことは明らかである)．したがって，実際に検証しなければならないのは (2) が成り立つかどうか (成り立つのはどういうときか) という点である．この検証のために，近似という手段を用いる (たとえば任意の $\mathcal{C}^k$ 関数は $\mathcal{C}^k(\Omega)$ の位相の意味で，$\mathcal{C}^\infty$ 関数列の極限になっていることを見るであろう)．また後に述べるように，ある種の場合には，近似列またはフィルターを構成する代りに，もっと直接的な方法や関数解析的な手法 (Hahn–Banach の定理[1]) を用いることもできる．しかし，多くの基本的な場合には，粗らい結果しか得られない，たとえば近似されるべきものが，'列' の極限になっていることを証明できないのである．なぜなら，F が E において稠密であるということは，E の任意の元が F に属する元の 'フィルター' の極限になっていることを意味するのであって，必ずしも F の元の列の極限であることを意味しないからである (E が距離付け可能ならば '稠密性' は '列的稠密性' を意味する；これが正しい場合が他にもあるが，一般には正しくない)．

---

1) 18章参照.

さて，解析関数，特に n 変数の**整関数** (entire function) から始めよう．n 次元複素空間 $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の正則関数 (複素解析的な関数) の全体は一つのベクトル空間であり，通常は，これに Ω の各コンパクト集合上の一様収束の位相を入れる．この位相によって，一つの Fréchet 空間を得る．これを $H(\Omega)$ で表わす．$\Omega=\mathbf{C}^n$ のときには，誤解のおそれがなければ，($H(\mathbf{C}^n)$ の代りに) 単に H と書く (10 章，例 II および 14 章定理 14.6 参照).

定理 15.1. $\mathbf{C}^n$ 上の整関数全体の空間において，多項式の全体は稠密な集合をなす．もっと正確にいえば任意の整関数 f は，(変数を $z=(z_1,\dots,z_n)$ とかくとき) その有限 Taylor 展開

$$\sum_{|p|<m} 1/p!\, f^{(p)}(0) z^p, \qquad m=0,1,2,\dots$$

の H の位相に関する極限に等しい．

後段に述べたことがすなわち定理の証明になっている．ここで次の記号を用いた．

$$p!=p_1!\cdots p_n!, \qquad f^{(p)}=(\partial/\partial z_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial z_n)^{p_n}, \qquad z^p=z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}.$$

ところで，$\Omega \neq \mathbf{C}^n$ のときには，注意が必要である．そのときには，Ω における正則関数は必ずしも多項式や整関数の極限にはならない (定理15.1によって，整関数の極限と多項式の極限とは同値である).

定義 15.1. $\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω が **Runge 領域** (Runge domain) であるとは，整関数の Ω への制限の全体が $H(\Omega)$ において稠密になることをいう．

次の結果はほとんど明らかである．

定理 15.2. **開多重円板** (open polydisk)

$$\{z\in\mathbf{C}^n\,;\,|z_j|<R_j\leqslant+\infty,\ j=1,\dots,n\}$$

は Runge 領域である．

次の補題は，多項式による近似に関する結果を導くために用いられる．

補題 15.1. f をコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とする．各整数 $k=1,2,\ldots$ に対して，関数

$$f_k(x)=(k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-k^2|x-y|^2)f(y)\,dy$$

は，変数 x をすべての複素数値にまで延長して，$\mathbf{C}^n$ 上の整関数に拡張することができる．$k\to\infty$ のとき，f_k は $\mathbf{R}^n$ 上で一様に f に収束する．

補題 15.1 の証明　f_k が $\mathbf{C}^n$ 上の整関数に拡張できることは容易にわかる．それには，'積分表示'

$$(15.1)\qquad (k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-k^2[(z_1-y_1)^2+\cdots+(z_n-y_n)^2])f(y)\,dy$$

を考察する．ここで $z_1,\ldots,z_n$ は複素変数である．この積分は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合，すなわち f の台の上だけの積分であることに注意する．Cauchy-Riemann 作用素 $\partial/\partial\bar{z}_1,\ldots,\partial/\partial\bar{z}_n$ を作用させると，積分記号下での微分によって，(15.1) で定義される関数が $\mathbf{C}^n$ において Cauchy-Riemann 方程式をみたすことがわかる (積分記号下で実変数 $\mathrm{Re}\,z_j$, $\mathrm{Im}\,z_j$, $j=1,\ldots,n$ に関して微分してみることによって，関数 (15.1) が $\mathscr{C}^\infty$ であることはただちにわかる；微分を積分記号下で行なうことの合法性も明らかである [1])．

さて，f_k が f に一様収束することを示そう．変数を変換すれば

$$f_k(x)=(k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}e^{-k^2|y|^2}f(x-y)\,dy$$

となる．ここで，すべての k に対し

$$(15.2)\qquad (k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}e^{-k^2|y|^2}dy=1$$

となることに注意しよう．実際，この左辺は

$$\left[(k/\sqrt{\pi})\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-k^2t^2}dt\right]^n$$

に等しい．t は一実変数である．ところで，よく知られているように

1)　たとえば，伊藤清三著 "ルベーグ積分入門" (裳華房) p.95 参照．読者自ら試みるのもよい．

$$k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

となるから，(15.2) が成り立つ．これから，

$$f_k(x)-f(x) = (k/\sqrt{\pi})^n \int_{\mathbf{R}^n} e^{-k^2|y|^2}[f(x-y)-f(x)]\,dy$$

を得る．ここで関数 $(k/\sqrt{\pi})^n e^{-k^2|y|^2}$ の重要な性質は，その全空間における積分が (15.2) の示すように 1 に等しいだけでなく，$k\to\infty$ のとき，積分の寄与する部分が原点の近くに集中することである．実際，この関数の原点における値は $(k/\sqrt{\pi})^n$ であって無限大に近づくが，任意の点 $y\neq 0$ においては非常に速く 0 に収束する．たとえば $n=1$ として，この関数のグラフ曲線を描いてみれば，この事情がわかるであろう．後に，これらの‘釣鐘形’の関数列が Dirac 測度に収束することを証明する (これらの性質を持つ関数列ならば，別にここに述べた関数でなくても用いることができる)．

さて，f はコンパクトな台をもつ連続関数だから，f は一様連続である．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\eta>0$ が存在して

$$|x-x'|<\eta \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

となる．そこで $k(\varepsilon)$ を十分大きく選んで，$k>k(\varepsilon)$ ならば

$$(k/\sqrt{\pi})^n \int_{|y|>\eta} e^{-k^2|y^2|}dy < \varepsilon$$

となるようにする．すると，このとき

$$\begin{aligned}|f_k(x)-f(x)| &\leqslant \sup_{|y|<\eta}|f(x)-f(x-y)|(k/\sqrt{\pi})^n \int_{|y|<\eta} e^{-k^2|y|^2}dy \\ &\quad +2\sup_{y\in\mathbf{R}^n}|f(y)|(k/\sqrt{\pi})^n \int_{|y|>\eta} e^{-k^2|y|^2}dy \\ &\leqslant (1+2\sup_{y\in\mathbf{R}^n}|f(y)|)\varepsilon\end{aligned}$$

を得る．ε は任意だったから，これは f_k が f に一様収束することを示している．(証終)．

系 1. f をコンパクトな台をもった $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathscr{C}^m$ 関数とする $(0\leqslant m\leqslant +\infty)$．

このとき，すべての $p=(p_1,\dots,p_n)$，$|p|\leqslant m$ に対し，$k\to+\infty$ のとき，関数列 $(\partial/\partial x)^p f_k$ は $(\partial/\partial x)^p f$ に $\mathbf{R}^n$ 上で一様収束する．

実際，変数変換 $x-y\mapsto x$ によって，f_k を表わす積分は

$$f_k(x)=(k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}e^{-k^2|y|^2}f(x-y)\,dy$$

となる．これを積分記号下で“p 回”微分すれば

$$(\partial/\partial x)^p f_k(x)=(k/\sqrt{\pi})^n\int_{\mathbf{R}^n}e^{-k^2|y|^2}[(\partial/\partial x)^p f](x-y)\,dy.$$

これに補題15.1を f の代りに $(\partial/\partial x)^p f$ として適用すればよい．

系 2. 任意の関数 $f\in\mathcal{E}_c{}^m(\mathbf{R}^n)$ は $\mathcal{E}^m(\mathbf{R}^n)$ において，多項式列の極限になる．

系2の証明のアイディアは簡単である．系1によって，任意の f は $\mathcal{E}^m$ 収束の意味で整関数列の極限になっている．定理15.1によって，整関数は $\mathcal{E}^\infty$ の意味で多項式によって近似される（$H(\mathbf{C}^n)$ の位相は $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ の位相からの誘導位相であることを思い出そう）．したがって，f が $\mathcal{E}^m(\mathbf{R}^n)$ において多項式列の極限になることは当然であろう．証明の細い点[1]は読者に委せる．

さて，今度は，コンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^\infty$ 関数による近似について調べよう．まず，コンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^\infty$ 関数の例を挙げよう．この例の関数は，これからしょっちゅう利用される．これは $\mathcal{E}_c{}^\infty$ 関数の存在を示すだけでなく，それらが空間 $\mathcal{E}^k(0\leqslant k\leqslant\infty)$，$L^p(1\leqslant p<\infty)$ において稠密に存在することの証明にも役立つ．例というのは次の関数である．

$$\rho(x)=\begin{cases}a\cdot\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1\\ 0\quad, & |x|\geqslant 1.\end{cases}\tag{15.3}$$

ここで定数 a は

$$a=\left(\int_{|x|<1}\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)dx\right)^{-1}$$

によって定義する．したがって

1) すなわち，ε-δ 式に論ずること．

(15.4) $$\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$$

が成り立つ．関数 ρ は開球 $\{x; |x|<1\}$ の各点において解析的である（すなわち，Taylor 級数の収束半径は 0 ではない[1]）；また，その球の外部 $\{x; |x|>1\}$ においても正則である．したがって，$\mathcal{C}^\infty$ であるかどうかの疑問は，球の境界，すなわち $|x|=1$ なる x においてだけ問題になる．ρ は**回転に関して不変** (rotation invariant) だから，結局，一変数の関数

$$\begin{cases} \exp(-1/(1-t^2)), & |t|<1 \\ 0 \quad , & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

が $t=1$ の付近で $\mathcal{C}^\infty$ であることを示せばよい[2]．したがって問題はただちに，次の関数

$$\begin{cases} \exp(-1/s), & s>0 \\ 0 \quad , & s \leqslant 0 \end{cases}$$

が $\mathcal{C}^\infty$ であることに帰着するが，これはよく知られており，明らかな事実である[3]．（実際，次式に注意せよ

$$\exp(-1/(1-t^2)) = \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right).$$

(15.5) $\begin{cases} \text{（本書を通しての）記号} \\ \varepsilon > 0 \quad \text{に対し，} \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon) \text{ とおく．} \end{cases}$

(15.4) によって，すべての $\varepsilon>0$ について

(15.6) $$\int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

これを見るには，変数変換 $\varepsilon/x \mapsto x$ を行なえば (15.4) に帰着することに注意すればよい．

また

1) この表現は不正確である．さらに“Taylor 級数の極限が f に一致する（収束する範囲で）”を要する．

2) すなわち，この一変数の関数を $\rho_1(t)$ とすれば，$\rho(x)=\rho_1(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$．$r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ は $r\neq 0$ のとき $\mathcal{C}^\infty$ だからよい．

3) これが $\mathcal{C}^\infty$ であること ($s=0$ の付近で) をいうには，$\mathcal{C}^m$ であることを m に関する帰納法でいうのがやさしい．

$$\operatorname{supp}\rho_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n\,;\, |x| \leqslant \varepsilon\}$$
$$\rho_\varepsilon(0) = \varepsilon^{-n}$$

に注意しよう．したがって，これらの関数は，関数列

(15.7)　　$$(k/\sqrt{\pi})^n e^{-k^2|x|^2}$$

と比較するとき，補題15.1との関連で，共通するところが多い．もちろん，ρ_ε はコンパクトな台をもつが，(15.7)の関数はそうではない；しかしそれぞれを密度と見れば，いずれの場合も，全質量は1に等しく（$\varepsilon\to 0$ または $k\to\infty$ のとき）質量は原点の近くに集中する．すでに注意したように，これらの様相は結局 Dirac 測度 δ と関連する．

補題 15.2. f をコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とすると，任意 $\varepsilon>0$ に対して，関数

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

は $\mathbf{R}^n$ における $\mathscr{C}_c^\infty$ に属する関数になる．さらに，f_ε の台は f の台の **ε 位** (order ε) の近傍，すなわち集合

$$\{x \in \mathbf{R}^n\,;\, d(x, \operatorname{supp} f) \leqslant \varepsilon\}$$

に含まれる．$\varepsilon \mapsto 0$ とすれば，f_ε は f に $\mathbf{R}^n$ において一様に収束する．

ここで，S を集合としたとき，$d(x, S)$ は点 x から S までのユークリッド距離を表わす，すなわち

$$d(x, S) = \inf_{y\in S} \mathrm{d}(x, y).$$

補題 15.2 の証明　$f_\varepsilon(x)$ を積分記号下で微分してみることによって，f_ε が $\mathscr{C}^\infty$ であることはただちにわかる．f_ε を表わす積分は，$y\in \operatorname{supp} f$，$x-y \in \operatorname{supp}\rho_\varepsilon$ となる集合の上で行なえばよい，すなわち $y\in\operatorname{supp} f$ かつ $|x-y|<\varepsilon$．したがって，x が $\operatorname{supp} f$ の ε 位の近傍に属さなければ，このような y は存在しないから，積分は0に等しい．最後に f_ε が f に一様収束することは次のようにして示される．

ここで再び，f は連続であってコンパクト集合の外で 0 になるから，一様連続であることを用いる．すなわち任意の $\eta>0$ に対して $\varepsilon>0$ が存在して

$$|x-y|<\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(y)|\leqslant\eta.$$

(15.6) によって，

$$f(x)-f_\varepsilon(x)=\int\rho_\varepsilon(x-y)[f(x)-f(y)]\,dy,$$

したがって，

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)|\leqslant\sup_{|x-y|<\varepsilon}|f(x)-f(y)|\int\rho_\varepsilon(x-y)\,dy\leqslant\eta.$$

(証終).

系 1. fをコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathcal{C}^k$ 関数とする $(0\leqslant k\leqslant\infty)$．このとき，任意の $p=(p_1,\ldots,p_n),|p|\leqslant k$ に対して，関数

$$(\partial/\partial x)^p f_\varepsilon$$

は，$\varepsilon\to0$ のとき $(\partial/\partial x)^p f$ に $\mathbf{R}^n$ 上で一様に収束する．

証 明 f_ε を表わす積分において，変数変換 $x-y\mapsto x$ を行なうと

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\rho_\varepsilon(y)f(x-y)\,dy.$$

積分記号下の微分により

$$(\partial/\partial x)^p f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\rho_\varepsilon(y)[(\partial/\partial x)^p f](x-y)\,dy.$$

これに補題 15.2 を f の代りに $(\partial/\partial x)^p f$ として適用すればよい．

定理 15.3. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$0\leqslant k\leqslant+\infty$ とする．任意の関数 $f\in\mathcal{C}^k(\Omega)$ は，台が Ω に含まれるコンパクト集合になるような $\mathcal{C}^\infty$ 関数列 $\{f_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$ の極限になる．さらに，Ω の各コンパクト集合 K に対し，$K\cap\operatorname{supp}f_j$ が $K\cap\operatorname{supp}f$ に収束する[1] ように $\{f_j\}$ を選ぶことができる．

1) 集合列の集合への収束は，すぐ後に説明がある．関数の場合と同様に種々の収束を考えることができよう．

集合列 S_j が集合 S に収束するとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して整数 $J(\varepsilon)$ が存在して，すべての $j\geqslant J(\varepsilon)$ について S_j は S の ε 位の近傍に含まれ，また S は S_j の ε 位の近傍に含まれることをいう．

定理 15.3 の証明 $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_j, \dots$ を開集合の列であって，その合併が Ω に等しく，各 $j\geqslant 1$ について $\bar{\Omega}_{j-1}$ は Ω_j に含まれるコンパクト集合になるものとする[1]．

d_j を $\bar{\Omega}_{j-1}$ から Ω_j の補集合までの距離とする．すべての j について $d_j>0$ である．そこで次の性質をもつ連続関数 g_j を構成することができる[2]．

$$\begin{cases} g_j(x)=1 & (d(x, \complement\Omega_j)>3d_j/4 \text{ のとき}) \\ g_j(x)=0 & (d(x, \complement\Omega_j)<d_j/2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

いま，$\varepsilon_j=d_j/4$ として，関数

$$h_j(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\rho_{\varepsilon_j}(x-y)g_j(y)\,dy$$

を考える．$x\in\Omega_{j-1}$ とするとき，もし $x-y\in\operatorname{supp}\rho_{\varepsilon_j}$ ならば，$d(y, \complement\Omega_j)\geqslant d(x, \complement\Omega_j)-|x-y|\geqslant d_j-d_j/4=3d_j/4$， ゆえに $g_j(y)=1$， したがって (15.6) より $h_j(x)=\int\rho_{\varepsilon_j}(x-y)\,dy=1$． すなわち，$\Omega_{j-1}$ においては $h_j\equiv 1$ である．
補題 15.2 によって h_j は $\mathcal{E}^\infty$ であり，コンパクトな台をもつ．また h_j が ($j\to\infty$ のとき) $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ において恒等的に 1 に等しい関数 $1(x)$ に収束することは明らかである．さらに，任意にあたえられた $f\in\mathcal{E}^k(\Omega)$ に対して $h_jf\in\mathcal{E}^k(\Omega)$ である，これは $\mathcal{E}^\infty$ 関数と $\mathcal{E}^k$ 関数の積は $\mathcal{E}^k$ 関数ということである．また Ω_{j-1} においては $h_jf=f$ だから，h_jf は $\mathcal{E}^k(\Omega)$ において f に収束する．いま K を Ω のコンパクト集合とすれば，十分大きい j に対して $K\subseteq\Omega_j$．これは $\operatorname{supp}f\cap K=\operatorname{supp}(h_jf)\cap K$ を意味する．

---

1) たとえば $\Omega_j=\{x\in\Omega\,;\,|x|<j+1,\ d(x, \complement\Omega)>\dfrac{1}{j+1}\}$．

2) たとえば $F_1=\{x\,;\,d(x, \complement\Omega_j)\geqslant 3d_j/4\}$，$F_2=\{x\,;\,d(x, \complement\Omega_j)\leqslant d_j/2\}$ とおいて，$g_j(x)=d(x, F_2)/[dx, F_1(+d(x, F_2)]$ とするとよい．

このようにして，f は，コンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^k$ 関数すなわち $h_j f$ によって近似できた．今度は，コンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^\infty$ 関数で近似できることを示さねばならない．そのためには補題 15.2 の系 1 を各 $h_j f$ に適用すればよい（台に関して述べたことは補題 15.2 に含まれている）．たとえば k が有限のときには，補題 15.2 の系 1 によってコンパクトな台をもつ $\mathcal{E}^\infty$ 関数 f_j であって，その台は $\mathrm{supp}(h_j f)$ の $1/j$ 位の近傍に含まれ

$$\sup_{|p|\leqq k}(\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|(\partial/\partial x)^p(f_j(x)-h_j(x)f(x)|\leqslant 1/j$$

なるものが存在する．f_j が f に $\mathcal{E}^k(\Omega)$ において収束することは明らか．また，K をコンパクト集合としそれがある Ω_{j-1} に含まれるとすれば，$K\cap\mathrm{supp}f_j$ は $K\cap\mathrm{supp}\,h_j f=K\cap\mathrm{supp}f$ の $1/j$ 位の近傍に含まれる．逆に $\varepsilon>0$ を任意にあたえたとき，$c>0$ を $K\cap\mathrm{supp}\,f$ が集合

$$\{x\in K;\ |f(x)|\geqslant c\}+\{x\in\mathbf{R}^n;\ |x|\leqslant\varepsilon\}$$

に含まれるように定める[1]．j を十分大きして，$K\subseteq\Omega_{j-1}$ かつ $1/j\leqslant c/2$ となるようにすれば，Ω_{j-1} において

$$|f_j(x)-f(x)|\leqslant c/2$$

が成り立つ．これからただちに，集合 $\{x\in K\,;|f(x)|\geqslant c\}$ は $K\cap\mathrm{supp}f_j$ に含まれることがわかる．したがって，$K\cap\mathrm{supp}f$ は $K\cap\mathrm{supp}f_j$ の ε 位の近傍に含まれる．

$k=\infty$ の場合の証明は演習として読者に委せる[2]．

系 1. $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathcal{E}^k(\Omega)$ で稠密である $(0\leqslant k\leqslant\infty)$．

系 2. $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathcal{E}_c^k(\Omega)$ で列的に稠密である $(0\leqslant k\leqslant\infty)$．

---

1) $U_c=\{x\in K\,;|f(x)|>c\}+\{x\in\mathbf{R}^n\,;|x|<\varepsilon\}$ とおけば U_c は開集合で $c\downarrow 0$ のとき単調に増大する．$\mathrm{supp}\,f$ の定義から $\bigcup_{c>0}U_c\supseteq K\cap\mathrm{supp}\,f$ となり，コンパクト性から，ある c に対して $U_c\supseteq K\cap\mathrm{supp}\,f$.

2) $k=\infty$ のときには，$f_j f$ をそのまま f_j とすればよい．

系 3.　$1 \leqslant p < \infty$ ならば，$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ で稠密である．

これには系 2 の $k=0$ の場合と定理 11.3 を組合せるとよい．

系 4.　多項式全体は，$\mathcal{E}^k(\Omega)$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ で稠密である．

これには定理 15.3 の系 1 と補題 15.1 の系 2 を組合せればよい．

演習問題

15.1.　g を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数であって >0 とする．このとき，整解析関数 h (すなわち，h は $\mathbf{C}^n$ 上いたるところ正則な関数に拡張できること，あるいは，同値であるが，h の Taylor 展開が各点で収束半径 ∞ になり，h に等しいことを意味する) が存在して，すべての $x \in \mathbf{R}^n$ について

$$0 < h(x) < g(x)$$

となる．

15.2.　$\{g_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ を $\mathbf{R}^n$ で連続で >0 であるような関数の列とする．f を $\mathbf{R}^n$ 上の台がコンパクトな連続関数，ω を $\operatorname{supp} f$ の任意の開近傍とする．このとき，整関数の列 $\{h_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ であって，$\mathbf{R}^n$ 上で一様に f に収束し，すべての $x \in \mathbf{R}^n$, $x \notin \omega$ に対して

$$|h_\nu(x)| \leqslant g_\nu(x)$$

となるものが存在することを証明せよ．(演習問題 15.1 と補題 15.1 の証明を利用せよ．)

15.3.　d を実数 $\geqslant 0$ とし，Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．Ω における **d 次の Gevrey クラス** (d-th Gevrey class) とは，Ω 上の $\mathcal{E}^\infty$ 関数 f であって，Ω の各コンパクト集合 K に対して定数 $A(f, K) > 0$ が存在して，すべての $p \in \mathbf{N}^n$ について

$$\sup_{x \in K} |(\partial/\partial x)^p f(x)| \leqslant A(f, K)^{|p|+1} (p!)^d$$

となるもの全体の空間のことをいう．この空間を $G_d(\Omega)$ で表わす．$G_0(\Omega)$ の元，$G_1(\Omega)$ の元はどのようなものか？ また

$$\bigcup_{d<1} G_d(\Omega)$$

の元は?

すべての整関数はこの合併に入るというのは正しいか.

15.4. 今度は $d>1$ としよう. 関数

$$f_a(x)=\begin{cases}e^{-1/t^a}, & (t>0)\\ 0 \quad , & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

の性質を調べ, 適当に a を選ぶことによって次のことを証明せよ. $\mathbf{R}^n$ 上で常に $\geqslant 0$ となる関数 $\sigma\in G_d(\mathbf{R}^n)$ であって, その台が丁度 $\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\leqslant 1\}$ に等しくなるようなものが存在する. (190 頁の関数 ρ の構成法を参照せよ.)

15.5. 無限遠において急速に減少する $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ を思い出そう (10 章, 例 IV ; $\mathscr{S}$ にはそこで定義した Fréchet 位相を入れておく). 次の定理を証明せよ.

定理 15.4. $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ は $\mathscr{S}$ において稠密である.

15.6. 次の定理を証明せよ.

定理 15.5. $\mathscr{S}$ に属する整関数全体は $\mathscr{S}$ において稠密である.

16.

1 の 分 割

この章では，前章で得た結果の幾つかの応用を述べる．任意の $\mathscr{C}^k$ 関数は，台の直径がいくらでも望むだけ小さいような $\mathscr{C}^k$ 関数の和として表わすことができることを示そう．これは，解析関数の場合と比べると，非常な違いである．解析関数を，台の小さな他の解析関数の和として表わすことは決してできない．なぜなら，コンパクトな台を持つ解析関数は (恒等的に 0 になるもの以外には) 存在しないからである．もし恒等的に 1 に等しい関数が，望むだけ小さな台をもつ $\mathscr{C}^\infty$ 関数 $\{g^i\}(i \in I)$ の和として表わすことができるとすれば，任意の $\mathscr{C}^k$ 関数 f について，同様な表現 $f = \sum_i (g^i f)$ ができることになる．このような関数の族 $\{g^i\}$ を **1 の分割** (partition of unity) という．このような1の分割を，どのようにして構成するのかを示そう (確立された習慣に従って，1の分割というときには，どの g^i も負にならないということを定義に付け加える)．g^i の台が望むだけ小さいということは，**開被覆**の概念を導入することによって最も良く説明される [1)]．

A を $\mathbf{R}^n$ の任意の部分集合とする．A の開被覆とは $\mathbf{R}^n$ の開集合族 $\{U^i\}$ であって，その合併が A を含むものをいう．このような定義には，囲りの空間 [ここでは $\mathbf{R}^n$] を用いているという欠点がある．これ [囲りの空間を用いること] は明らかに不必要である．A を任意の位相空間としたとき，A の開被覆とは A の開集合族 $\{V^i\}$ であって，その合併が A に等しいものをいう．$A \subseteq \mathbf{R}^n$ の場合

1) この概念は 6 章に出ているが，もう一度繰り返す．

には (A に誘導位相が入っているとして)，$V^i=U_i\cap A$ とすればよい．開被覆 $\{V^i\}$ が**局所有限** (locally finite) であるとは，A の任意の点に対して適当な近傍をとれば，その近傍が有限個の V^i としか交わらないことをいう．$\{W^i\}$ をもう一つの開被覆としたとき，$\{W^i\}$ が $\{V^i\}$ **よりも細かい** (finer) であるとは，任意の W^i が適当な V^i に含まれることをいう．

定理 16.1. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．$\{U^i\}(i\in I)$ を Ω の開被覆とすれば，$\{U^i\}$ よりも細かい局所有限な開被覆 $\{W^j\}(j\in J)$ が存在する．

証　明　例によって，Ω の相対コンパクトな開集合列 $\{\Omega_k\}$ $k=0,1,2,\cdots$ を，その合併が Ω になり，各 $k\geqslant 1$ に対して，Ω_{k-1} の閉包 $\bar{\Omega}_{k-1}$ (これはコンパクト集合) が Ω_k に含まれるようにとる．各 $k=0,1,2,\cdots$ に対して，有限個の開集合 U^i を $\bar{\Omega}_k$ を覆うようにとり，それを $U_k{}^1,\cdots,U_k{}^{r_k}$ とする．そうして

$$V^{(\alpha,k)}=U_k{}^\alpha\cap\complement\bar{\Omega}_{k-1},\qquad k\geqslant 1,\ \alpha=1,\cdots,r_k,$$

$$V^{(\alpha,0)}=U_0{}^\alpha\cap\Omega_1,\qquad \alpha=1,\cdots r_0$$

とおく．各 $k\geqslant 1$ に対して $V^{(\alpha,k)}$ $(\alpha=1,\cdots,r_k)$ は $\bar{\Omega}_k\cap\complement\bar{\Omega}_{k-1}$ を覆い，$V^{(\alpha,0)}$ $(\alpha=1,\cdots,r_0)$ は $\bar{\Omega}_0$ を覆う．これからただちに，k,α がともに動くとき $V^{(\alpha,k)}$ は Ω を覆うことがわかる．Ω の各点はどれかの Ω_{k-1} に入っており，$\Omega_{k-1}\cap V^{(\alpha,l)}=\emptyset$ $(l\geqslant k)$ だから，被覆 $\{V^{(\alpha,k)}\}$ は局所有限である．また，これが $\{U^i\}$ よりも細かいことは，任意の k,α について $V^{(\alpha,k)}\subseteq U_k{}^\alpha$ から明らかである．

注意 16.1. 定理 16.1 の証明で構成した開被覆 $\{V^{(\alpha,k)}\}$ は可算である．$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の任意の局所有限な開被覆が可算になるとは明らかであろう．もし，$\{V^j\}$ が局所有限な開被覆であれば，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して，K は有限個の V^j としか交わらないことに注意しておく．

次の定理の述べるところは，$\{V^j\}$ を Ω の局所有限な開被覆とすれば，各 V^j を少し縮めても，Ω の被覆になっていることである．

定理 16.2. $\{V^j\}$ を Ω の局所有限な開被覆とする．各 j に対して，Ω の開集

合 W^j が存在して，W^j の閉包が V^j に含まれ，j が動くとき $\{W^j\}$ が Ω の開被覆となる（これは必然的に局所有限）．

証　明　Ωを，相対コンパクトな開集合列 Ω_k であって，$\overline{\Omega}_{k-1} \subseteq \Omega_k$ $(k \geqslant 1)$ となるものの合併として表わす．各 k について，Ω_k と交わるような V^j, $(j \in J)$ の（有限個の）族を考える．$V^j \cap \overline{\Omega}_k \neq \emptyset$ となる添字 j の全体を J_k としよう．もちろん，$\overline{\Omega}_k \subseteq \bigcup_{j \in J_k} V^j$ となる．そこで次の関数を考える．

(16.1)
$$x \mapsto \sup_{j \in J_k} d(x, \complement V^j).$$

($d(x, A)$ は点 x から集合 A までの距離を表わす.）これは $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数である．それは，有限個の連続関数の上限はやはり連続であることと次の事実による．

補題 16.1. A を $\mathbf{R}^n$ の任意の [空でない] 集合としたとき，$\mathbf{R}^n$ 上の関数

(16.2)
$$x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} |x-y|$$

は連続である．

証明は読者にまかせる[1]．

関数 (16.1) はコンパクト集合 $\overline{\Omega}_k$ の各点で >0 であるから，定数 $c_k > 0$ が存在して，(16.1) は $\overline{\Omega}_k$ の各点で $\geqslant c_k$ となる．いま，各 j に対して

$$W_k{}^j = \{x \in \Omega_k d(x, \complement V^j) > c_k/2\}$$

とおこう．$k = 0, 1, 2, \cdots$．$W_k{}^j$ が空集合になることがおこるかもしれないが，いずれにしても，$W^j = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k{}^j$ とおく．この W^j が定理に述べた諸要求をみたすことは見やすい[2]．

さて，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ における 1 の分割の構成にとりかかることにしよう．$\{V^j\}(j \in J)$ を局所有限な Ω の一つの開被覆とする．各 $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，添字 $j \in J$ の有限集合 J_k を，$j \in J_k$ なら $V^j \cap \Omega_k \neq \emptyset$, $j \notin J_k$ なら $V^j \cap \Omega_k = \emptyset$ なる

---

1) 容易にわかる不等式 $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x-y|$ から出る．

2) $W^j = \bigcup_{k \in J_k} W_k{}^j$ (有限和) になっていることから，$\overline{W}^j = \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{W}_k{}^j$ となることと，$\overline{W}_k{}^j \subseteq \{x \in \overline{\Omega}_k \,;\, d(x, \complement V^j) \geqslant C_k/2\}$ に注意するとよい．

ものとする (Ω_kは前に説明したものである). そして, $V^{k,j}=\Omega_k\cap V^j$ とおく. 集合族 $\{V^{k,j}\}$ は Ω の一つの局所有限開被覆となる. これに定理16.2を適用すれば, Ω の開被覆 $\{W^{k,j}\}$ であって, 各 (k,j) について $\overline{W^{k,j}}$ は (相対コンパクトな) 開集合 $V^{k,j}$ のコンパクト集合となるものが存在する. さて, 構成のアイデアは次の通りである. まず, $W^{k,j}$ 上では恒等的に1に等しく, その台が $V^{k,j}$ に含まれるコンパクト集合になるような連続関数 $g^{k,j}$ を作る; これは補題16.1を用いれば容易である. 次に, 補題15.2の系1を利用して, $g^{k,j}$ を $\mathscr{C}^\infty$ 関数 $\gamma^{k,j}$ で近似する. $\gamma^{k,j}$ の台は $\mathrm{supp}\, g^{k,j}$ の十分小さな近傍に含まれるようにする. したがって, $\gamma^{k,j}$ の台もまた $V^{k,j}$ のコンパクト部分集合になる. $\gamma^{k,j}$ が $g^{k,j}$ を十分近似して, $x\in W^{k,j}$ ならば $\gamma^{k,j}(x)>1/2$ となるようにする. $\mathrm{supp}\,\gamma^{k,j}\subseteq V^{k,j}$ だから, Ω の各点は有限個の $\mathrm{supp}\,\gamma^{k,j}$ としか交わらないような近傍をもつ. したがって, 和 $\gamma(x)=\sum_{k,j}\gamma^{k,j}(x)$ を作ることができる. (この和は, $k=0,1,\cdots$ と $j\in J_k$ について行なう). この和はΩにおける $\mathscr{C}^\infty$ 関数 $x\mapsto\gamma(x)$ を定義する. $g^{k,j}$ を構成するときには, それがいたるところ負にならないようにする. したがって, 補題15.2の証明を見ればわかるように, $\gamma^{k,j}$ もいたるところ非負になる. $W^{k,j}$ においては $\gamma>1/2$ であり, $W^{k,j}$ の全体はΩを覆うから, いたるところ $\gamma>1/2$ となる. これからただちに, $1/\gamma$ もまたΩ上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数になる.

$$\beta^j(x)=\frac{1}{\gamma(x)}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\,\gamma^{k,j}(x)$$

とおく, ここで記号 $\sum'$ は, $j\in J_k$ となるような k についての和である (そうでなければ $\gamma^{k,j}$ は定義されない [恒等的に0としてもよい]). 関数 β^j は次の性質をもつ.

(16.3) 各 j について, β^j はΩ上の $\mathscr{C}^\infty$ 関数である.

(16.4) 各 j について, β^j の台は V^j に含まれる.

(16.5) 各 j について, β^j はΩ上で $\geqslant 0$ である.

(16.6) すべての $x\in\Omega$ に対して, $\sum_j\beta^j(x)=1$.

($\{V^j\}$ が局所有限なことと (16.4) から直ちに, Ω の各点 x_0 は, 有限個の β^j を除けば, β^j がすべて0になるような近傍を持つことがわかる.)

定義 16.1. $\{V^j\}(j\in J)$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の一つの局所有限開被覆とする．被覆 $\{V^j\}$ と同じ添字集合 J をもつ関数族 $\{\beta^j\}$ が性質 (16.3) — (16.6) をもつとき，$\{\beta^j\}$ を被覆 $\{V^j\}$ に従属する．($\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ の) **1 の分割**という．

もし，すべての V^j が相対コンパクトであれば，関数 β^j は，(16.4) により，すべてコンパクトな台をもつ．すなわち $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ における 1 の分割をうる．しかし，V^j が相対コンパクトでないならば，$\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ における 1 の分割で $\{V^j\}$ に従属するものは，一般には，存在しないことに注意する必要がある．自明な反例としては，添字集合 J が唯一つの元からなる場合を考えればよい．

定義 16.1 の前に述べた議論は，本質的に，Ω の任意の局所有限開被覆 $\{V^j\}$ に従属するような $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ における 1 の分割の存在証明になっている．ただ，議論の最初に述べた連続関数 $g^{k,j}$ の構成方法を述べればよいだけである．これは，次の一変数の関数 $f(t)$ を用いることにより，容易にできる．

$$f(t)=\begin{cases}1-2t, & (t\leqslant 1/2 \text{ のとき})\,;\\ 0\quad, & (t\geqslant 1/2).\end{cases}$$

として，$W^{k,j}$ から $V^{k,j}$ の補集合への距離を $d_{k,j}$ とするとき，

$$g^{k,j}(x)=f(d(x,W^{k,j})/d_{k,j})$$

とすればよい．補題 16.1 により，これは連続関数の合成だから，$g^{k,j}$ は連続である．これは，$W^{k,j}$ では 1 に等しく，$W^{k,j}$ の $d_{k,j}/2$ 位の近傍の外では 0 に等しい．この近傍は明らかに $V^{k,j}$ の相対コンパクト集合である．証明の残りの細部は読者にとっても容易であろう．

かくして，次の定理を得る．

定理 16.3. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω の任意の局所有限開被覆があたえられたとき，この被覆に従属するような $\mathscr{E}^\infty(\Omega)$ における 1 の分割が存在する．

系. $\{V^j\}$ を Ω の局所有限開被覆とし，f を $\mathscr{E}^k(\Omega)$ に属する関数 ($0\leqslant k\leqslant\infty$) とすれば，

$$f = \sum_j f_j$$

ただし $f_j \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, $\mathrm{supp}\, f_j \subseteq V^j$ と表わすことができる.

定理 16.4. Fを$\mathbf{R}^n$の閉集合とし，UをFの任意の開近傍とすれば，関数 $g \in \mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ であって，Fのある近傍で1に等しく，Uの補集合で恒等的に0になるものが存在する.

証明 Fの開近傍Vを，その閉包$\bar{V}$がUに含まれるようにとる．$W = \mathbf{R}^n - \bar{V}$ とおくと，(U, W)は$\mathbf{R}^n$の一つの開被覆となる．これは明らかに局所有限．定理16.3により，この被覆に従属するような$\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$の1の分割が存在する．この1の分割は二つの関数$g, h$からなる．$h$の台は$W$に含まれるから，$h$は$V$で恒等的に0になる．$g+h=1$より，$V$では$g \equiv 1$. また $\mathrm{supp}\, g \subseteq U$ だから，gはすべての要求を満たす.

演習問題

16.1. 空間$\mathbf{R}^n$の次元nだけに依存する整数$\nu(n)$であって，次の条件がみたすものの存在を示せ．$x \in \mathbf{R}^n$ および $t>0$ の関数の族 $\{g^i(x,t)\}(i \in I)$ が存在して，次の諸性質をもつ.

(*a*) 任意の固定されたtに対して，$\{g^i(x,t)\}(i \in I)$ は $\mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ における1の分割である

(*b*) 各tに対して，$g^i(x,t)$ のxの関数としての台はすべて直径は $<1/t$.

(*c*) 各tと各iに対して，$i' \in I$ であって $\mathrm{supp}\, g^i(x,t) \cap \mathrm{supp}\, g^{i'}(x,t) = \phi$ となるものの個数はたかだか$\nu(n)$である.

(*d*) 各tに対して，関数 $g \in \mathcal{E}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ であって，各 $i \in I$ に対して一点 $x^i \in \mathbf{R}^n$ があって，$g^i(x,t) = g(x-x^i)$ がすべてのxについて成りたつものが存在する.

16.2. $\{U_j\}(j \in J)$を$\mathbf{R}^n$の任意の局所有限開被覆とする．この被覆$\{U_j\}$に従属する1の分割$\{g_j\}(j \in J)$であって，$\mathbf{R}^n$においてd次の Gevrey クラス $G_d(\mathbf{R}^n)$ (演習問題15.3参照) に入るものが存在することを示せ，ただし $d>1$ とする．(演習問題15.4を利用せよ).

17.

開写像定理

この章は第I部の最後の章である．ここでまた一般論にもどって，有名な**開写像定理** (open mapping theorem) あるいは **Banach の定理** (Banach theorem) とよばれる定理を述べて証明しよう．複素数体上の二つの TVS E, F を考える．f を E からFへの線形写像とする．いつもの三角形の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & \mathrm{Im}\, f & \xrightarrow{i} & F \\ \phi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & & & \\ E/\mathrm{Ker}\, f & & & & \end{array}$$

ここで，ϕは標準写像，iはfの像 $\mathrm{Im}\, f$ を Fに埋め込む単射，$\tilde{f}$はこの図式を可換にすることによって一意的に定まる写像である．fが連続であるためには，$\tilde{f}$が連続であることが必要十分である．これは既知である．fが連続であると否とにかかわらず，$\tilde{f}$は一対一であり，また，$E/\mathrm{Ker}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$への写像として上への写像である．fが**準同形写像** (homomorphism) であるとは，定義により，$\tilde{f}$が $E/\mathrm{Ker}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$ の上への同形写像になることをいう．あるいは，fは**開写像** (open mapping) であるともいう (連続関数をとり扱っていることを了解の上で)．さて，Fを Hausdorff とする．fが連続であれば $\mathrm{Ker}\, f$ は閉であり，したがって $E/\mathrm{Ker}\, f$ も Hausdorff になる．いま仮りに，$\mathrm{Im}\, f$が有限次元だとしてみると，$\mathrm{Im}\, f$ も $E/\mathrm{Ker}\, f$ も同じ次元となり，したがって $\tilde{f}$は常に同形写像になり，fは準同形写像となる．すなわち，TVS E から Hausdorff TVS F への連続線形写像 f であって，その像が有限次元になるようなものは，すべて準同形写像である．そこで次のような問題を提出する．TVS の

一つのクラスであって，E も $\mathrm{Im}\, f$ もそのクラスに入っていれば，f が連続である限り必ず準同形写像になるようなクラスが存在するだろうか？ もちろん，$\mathrm{Im}\, f$ に対する制限をゆるめることに真の興味がある．$\mathrm{Im}\, f$ が有限次元になるというような条件は余りに強すぎるのである．E もまた勝手な TVS というわけにはゆくまい．

そこで，E の一般性については譲歩するが，この章で示すように，E についても $\mathrm{Im}\, f$ についても相当な一般性をもって望む性質が得られるのである．実際上は，E と $\mathrm{Im}\, f$ について同じ条件でよいことになる．しかも，この条件というのが我々にとってすでにおなじみのものである．すなわち，E と $\mathrm{Im}\, f$ が距離付け可能かつ完備であればよいのである (局所凸である必要はない)．

$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ とを位相ベクトル空間の二つのクラスとしよう．もし，任意の TVS $E \in \mathscr{A}$ と任意の TVS $F \in \mathscr{B}$ について，E から F の上への連続線形写像がすべて準同形写像になるならば (簡単のため，写像による像が値域空間全体であると仮定する．この仮定は，換言すれば，上への写像だけを考えることになる)，開写像定理がクラスの対 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ について真であるということにする．開写像定理が成り立つということは大きな利点がある．実際，この定理を証明しようというのは単なる興味からではない．例を挙げて説明しよう．

いま $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ について開写像定理が成り立つとしてみよう．E をクラス $\mathscr{A}$ に属する TVS，F をクラス $\mathscr{B}$ に属する TVS とする．いま，g を F から E への線形写像とする．g が連続であるか否かが問題であるとしよう．g に関しては次のことがわかっているとする．g は上への写像であり，g は一対一であるとする．これらから，g の逆写像の存在がわかるが，この g の逆写像が連続であるとする．g の逆写像を f とすれば，$f: E \to F$ は開写像定理により開写像となる．すなわち，g は連続になる．これが問題なのであった．

さて，上に述べた写像 g の**グラフ** (graph) を考えよう．g のグラフ $\mathrm{Gr}\, g$ は，$E \times E$ の部分集合として，$x \in E$ と $y \in F$ の対 (x, y) であって，$y = g(x)$ となるものの全体である：

$$\mathrm{Gr}\, g = \{(x, y) \in E \times F\,;\, x \in E, y \in F, y = g(x)\}.$$

g に関する条件をもう一度述べると，g は一対一で上への写像であり，連続な逆写像 $f:E\to F$ をもつものであった．しかし，g が連続であるとは仮定しない．簡単のため，距離付け可能な空間の場合に話を限ることにしよう．(x, y) を $E\times F$ における $\mathrm{Gr}\,g$ の閉包に属する点とする．積空間 $E\times F$ もまた距離付け可能であるから，$\mathrm{Gr}\,g$ の元からなる列 (x_n, y_n)，$n=1, 2, \ldots$ を選んで (x, y) に収束させることができる．これは，F において $x_n\to x$，E において $y_n\to y$ となることを意味する．ところで，各 n について $y_n=g(x_n)$，すなわち，$f(y_n)=x_n$ であるが，f の連続性により，$f(y_n)$ は F において $f(y)$ に収束する．これはまた x にも収束するから，$x=f(y)$ すなわち $y=g(x)$ が結論される．これは $(x, y)\in \mathrm{Gr}\,g$ を意味する．換言すれば，g のグラフは閉じている．g が連続であることを結論したいならば，次の問題を提起することになる．どのような場合に，グラフが閉じているという事実から線形写像の連続性を導き出すことができるか？　この問題と関連して，次の事実を証明することは読者の演習問題としよう．

命題 17.1. X, Y を二つの位相空間とする（代数的構造を持っている必要はない）．Y は Hausdorff とする．f を X から Y への連続写像とする．このとき，積位相空間 $X\times Y$ において f のグラフは閉じている．

再び，TVS のクラスの対 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ であって，任意の TVS $E\in\mathscr{A}$ と任意の TVS $F\in\mathscr{B}$ に対し，線形写像 $f:E\to F$ のグラフが閉じているならば f が連続であることが結論できるようなものを考えよう．もし，そのようになっているならば，“$(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ に対して**閉グラフ定理** (closed graph theorem) が成り立つ”という．閉グラフ定理が成り立つことは非常に便利である．それは，多くの場合において，写像の連続性を直接に証明するよりは，写像のグラフが閉じていることを証明する方がやさしいからである．実際，よく用いられる次の結果はそれを示している．

命題 17.2. E, F, G を三つの Hausdorff[1] TVS とする．j を F から G への一対一連続線形写像とする．

$f: E \to F$ を線形写像であって，合成写像 $j \circ f: E \to G$ が連続になるものとする．このとき f のグラフは閉である．

写像 j は次のような直観的意味をもっている．j によって，F は G の部分ベクトル空間と見なすことができる上に，さらに j の連続性から，F の位相は G からの誘導位相よりも細かいことになる．

命題 17.2 の証明[2] (x_0, y_0) を $E\times F$ における $\mathrm{Gr}\, f$ の閉包の元とすれば，$\mathrm{Gr}\, f$ 上のフィルター $\mathscr{F}_0$ が存在して，それは $E\times F$ 上のフィルター $\mathscr{F}$ であって (x_0, y_0) に収束するものを生成する．$\mathscr{F}_0$ としては，(x_0, y_0) の近傍と $\mathrm{Gr}\, f$ の共通部分の全体からなるフィルターをとればよい．二つの座標軸への射影写像 $(x, y) \mapsto x$ および $(x, y) \mapsto y$ による $\mathscr{F}$ の像をそれぞれ $\mathscr{F}_E$ および $\mathscr{F}_F$ とする．$\mathscr{F}$ が (x_0, y_0) に収束することは，$\mathscr{F}_E$ が x_0 に収束し，$\mathscr{F}_F$ が y_0 に収束することと同値である（これは，積空間における収束の定義である）．合成写像 $j \circ f$ の連続性により $j(f\mathscr{F}_E)$ は G 上のフィルターであって $j(f(x_0))$ に収束する．j は連続だから，$j\mathscr{F}_F$ もまた G 上のフィルターで $j(y_0)$ に収束する．ところで，フィルター $\mathscr{F}_0$ の定義に帰ってみれば，$\mathscr{F}_0$ は $\mathrm{Gr}\, f$ 上のフィルターであって，$j(f\mathscr{F}_E)$ と $j\mathscr{F}_F$ が G 上の同じフィルターになることがただちにわかる．実際，$\mathscr{F}_0$ の元は，$E\times F$ の部分集合であって $(x, f(x))$ の形の点から成っているが，この第1座標に $j \circ f$ を施せば $j(f(x))$ になり，第2座標に j を施したものと同じになるからである．

G は Hausdorff だから $j(y_0) = j(f(x_0))$ となり，j が一対一だから $y_0 = f(x_0)$ を得る．すなわち $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}\, f$．　　(証終)．

次の系は，前に述べた距離付け可能空間のあいだの線形写像に関する結果の一般化である．

---

1) この仮定 Hausdorff は不用（次の脚注 2) 参照).

2) 次のように考えてもよい．F に G からの誘導位相を入れて考えると $\mathrm{Gr} f$ は $E\times F$ の閉集合，Fの位相はこの誘導位相より細かいから $\mathrm{Gr} f$ はもちろん閉．

系． E, F を Hausdorff TVS，g を F から E の上への一対一の線形写像であって逆が連続とすれば，g のグラフは閉である[1]．

読者はこの結果を，命題 17.2 から直接に導いてみるとよい．

開写像定理と閉グラフ定理の関係はどうなっているかを考えてみよう．$f: E \to F$ を線形写像とし，そのグラフ $\mathrm{Gr}\, f$ を考える．これは積ベクトル空間 $E \times F$ の部分ベクトル空間である．$E \times F$ に積位相を入れ，それを $\mathrm{Gr}\, f$ に誘導すれば，$\mathrm{Gr}\, f$ は位相ベクトル空間となる．p, q をそれぞれ第1および第2座標への射影写像を $\mathrm{Gr}\, f$ に制限したものとする．

$$p(x, f(x)) = x, \qquad q(x, f(x)) = f(x)$$

である．p は一対一でかつ上への写像であり，その逆を p^{-1} とかけば

$$f = q \circ p^{-1}$$

となる．もし，f が連続になることを証明する必要があるならば，p^{-1} が連続になることを示せばよい．積位相の定義によって，p と q は連続である．p についていえば，一対一で上への連続写像をとり扱っていることになる．したがって，それが開であることを示すならば，p^{-1} が連続になり，f が連続になる．そこで，次の結果を述べよう．

命題 17.3. E, F を二つの TVS であって，次の性質をもつとする：

(17.1) G を $E \times F$ の任意の閉部分空間とし，u を G から E の上への任意の連続線形写像とするとき，u は開写像となる．

このとき，E から F への線形写像 f のグラフが閉であれば，f は連続になる．

いままでに述べた議論から明らかなように，条件 (17.1) において，G から E への写像としては，一対一かつ上への写像に限っても良かったのである．この章では，開写像定理を距離付け可能で完備な TVS に対して証明する．距離付け可能で完備な二つの TVS の積空間の任意の閉部分空間は距離付け可能で完備であるから，閉グラフ定理もまた，距離付け可能で完備な TVS に対して成

1)　前頁の脚注に述べたように，Hausdorff の仮定は不用．

立することになる.

最後に，開写像定理を述べて証明しよう.

定理 17.1. E, F を二つの距離付け可能で完備な TVS とする. E から F の上への連続線形写像は，すべて準同形写像である.

証 明 証明は相当はっきりと二つの部分にわけることができる. 最初の部分においては，考える写像 $u: E \to F$ が上への写像であることと F が Baire の性質 (92 頁) を持っていることだけを用いる. 第2の部分においては，E, F 共に距離空間にできることと E が完備なことを利用する.

補題 17.1. u を TVS E から Baire 空間 F の上への線形写像とする. E における 0 の任意の近傍Uについて，その像 $u(U)$ の閉包 $\overline{u(U)}$ は F における 0 の近傍となる.

補題 17.1 の証明 F が Baire 空間であるということは，内点をもたないような閉集合の可算個の合併としては F は表わされ得ないということである. いま V を E における 0 の平衡的近傍であって $V+V \subseteq U$ なるものとする. V は吸収的であるから

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$$

と書ける. さらに u は上への写像であるから

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,u(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,\overline{u(V)}.$$

したがって，$\overline{n\,u(V)}$ という形の閉集合のうちで少なくとも一つは空でない内部をもつ. 写像 $x \mapsto (1/n)x$ は F を F 自身の上にうつす同形写像だから，$\overline{u(V)}$ が少なくとも一つの内点をもつ. それを x_0 としよう. $W+x_0$ を x_0 の近傍であって $\overline{u(V)}$ に含まれるものとする. ここで W は F の 0 の近傍である. **アフィン写像** (affine mapping) $x \mapsto x - x_0$ は F から F 自身の上への位相写像であり，$\overline{u(V)}$ を $\overline{u(V)-x_0}$ の上にうつし，$W+x_0$ を W の上にうつすから，

$W \subseteq \overline{u(V)-x_0}$ を得る. 明らかに $\overline{u(V)-x_0} \subseteq \overline{u(V)-u(V)} = \overline{u(V-V)} \subseteq \overline{u(U)}$ となるから (ここで $V=-V$ を用いた), $W \subseteq \overline{u(U)}$ となる. これは. $u(U)$ の閉包が F の 0 の近傍であることを示している. (補題の証終).

いまや, F が Baire 空間であって, u が上への写像であれば, E における 0 の任意の近傍の像は, F における 0 のある近傍において到る所稠密であることを知った. 次の補題は, 定理 17.1 の仮定の下においては, E における 0 のその近傍をもう少し大きくするならば, その像が F の 0 の近傍において稠密であるだけでなく, その像自身が F における 0 の近傍になることを示すものである. そのためには, E および F それぞれの上の距離を利用する. これらの距離を両方ともに同じ文字 d で表わすことにする (誤解のおそれはない). z を E または F の点としたとき, $B_r(z)$ によって, 中心 z, 半径 $r>0$ の球, すなわち, 集合

$$\{z' \,;\, d(z, z') \leqslant r\}$$

を表わすことにする. 定理 17.1 の証明においては, E および F の上の**平行移動で不変** (translation-invariant) な距離が入用になる. 距離付け可能な TVS はすべてそのような距離をもち, 位相はそれによって定義される (距離について語るときには, それによって定義される位相がもとの位相と一致するものとしている). このことは一般にはまだ証明していなかった[1]. 局所凸な距離付け可能空間についてだけ証明を述べたのであった. 一般の場合について述べることを好まなければ, 局所凸な場合だけに制限して考えても差支えない.

補題 17.2. E を距離付け可能で完備な TVS とし, F を距離付け可能な (必ずしも完備とは限らぬ) TVS とする. u を E から F への連続線形写像であって, 次の性質をもつとする.

(17.2) 任意の $r>0$ に対して, $\rho>0$ が存在して, すべての $x \in E$ に対し

$$B_\rho(u(x)) \subseteq \overline{u(B_r(x))}$$

が成り立つ.

---

1) 一般の場合については, たとえば Bourbaki, Topologie générale 参照.

このとき，r, ρ を (17.2) に述べたような関係にあるとすれば，$a > r$ ならばすべての $x \in E$ について

$$B_\rho(u(x)) \subseteq u(B_a(x))$$

が成り立つ．

補題 17.2 の証明　a は無限正項級数の和として表わすことができる：

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} r_n. \qquad r_0 = r, \quad r_n > 0 \quad (\text{すべての } n \text{ について}).$$

y を $B_\rho(u(x))$ の任意の点とする．証明すべきことは，$x' \in B_a(x)$ が存在して $u(x') = y$ となることである．そこで，E の点列 x_n を，$u(x_n)$ が F において y に収束し，x_n が E における Cauchy 列になるように定義しよう．そうすれば，E の完備性から x_n は E の点 x' に収束し，必然的に $u(x') = y$ をみたす．点列 x_n は，$d(x, x') \leqslant a$ となるように構成する．

性質 (17.2) を利用すれば，任意の n に対して，数 $\rho_n > 0$ を，$\rho_n > \rho_{n+1} \to 0$ となり，すべて $x \in E$ について

$$B_{\rho_n}(u(x)) \subseteq \overline{u(B_{r_n}(x))}$$

となるように選ぶことができる．

まず最初は $B_{r_0}(x)$ の点 x_1 を，$d(u(x_1), y) < \rho_1$ となるようにとる[1]．これは $y \in B_{\rho_1}(u(x_1))$ を意味する．したがって，点 $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$ が存在して $d(u(x_2), y) < \rho_2$ とできる．すなわち $y \in B_{\rho_2}(u(x_2))$．このように続けてゆくと，各 n について点 $x_{n+1} \in B_{r_n}(x_n)$ を $d(u(x_{n+1}), y) < \rho_n$ となるようにとることができる．点列 $\{x_n\}$ は要求された性質をすべて持っている：すべての n について $d(x_n, x_{n+1}) < r_n$ だから $\{x_n\}$ は Cauchy 列であり，その極限 x' は $d(x, x') \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} r_n = a$ をみたし，さらに $d(u(x_n), y) \to 0$ である．(補題の証終)．

定理 17.1 の証明のつづき　補題 17.1 によって，任意の $r > 0$ に対して，$\rho > 0$ が存在して

$$B_\rho(0) \subseteq \overline{u(B_r(0))}$$

1)　$y \in B_\rho(u(x))$ であり，$\overline{u(B_{r_0}(x))} \supseteq B_\rho(u(x))$ だから，x_1 は存在する．

ここで，距離が平行移動に関して不変であることを用いると，すべての実数 $\delta>0$ とすべての z について

$$B_\delta(z)=B_\delta(0)+z$$

だから，性質 (17.1) が成り立つ．したがって，補題 17.2 によって，$a>r$ ならば

$$B_\delta(0)\subseteq u(B_a(0)).$$

これは明らかに，u が 0 の近傍を 0 の近傍に写すことを示している．(証終).

系 1. 距離付け可能な完備 TVS E から，もう一つの距離付け可能な完備 TVS F の上への一対一の連続線形写像は同形写像 (すなわち両連続) である．

系 2. $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ を同じベクトル空間 E 上の二つの距離付け可能な位相とし，これらは E を完備な TVS にすると仮定する．もし一方が他方よりも粗いとすれば，これらは同値になる．

系 3. p,q をベクトル空間 E 上の二つのノルムとする．ノルム空間 (E,p), (E,q) は共に Banach 空間になるとしよう．さらに，定数 $C>0$ が存在して，すべての $x\in E$ について

$$p(x)\leqslant C\cdot q(x)$$

が成り立つと仮定しよう．
このとき，p,q は同値になる．すなわち定数 $C'>0$ が存在して，すべての $x\in E$ について

$$q(x)\leqslant C'p(x)$$

が成り立つ．

命題 17.3 とそれにつづく系から，距離付け可能な完備 TVS に対する閉グラフ定理を得る．

系 4. E, F を二つの距離付け可能な完備 TVS とし，f を E から F への線形写像とする．もし，f のグラフが閉であれば，f は連続である．

演 習 問 題

17.1. Ω を $\mathbf{C}^n$ の開集合とし，$H(\Omega)$ を Ω 上の正則関数全体の空間とする．$\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{R}^{2n}$ と標準的に同一視すること[1] によって Ω を $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合とみなし，$H(\Omega)$ を $\mathcal{C}^k(\Omega)(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ の部分ベクトル空間とみなす．開写像定理を用いて，$H(\Omega)$ 上に $\mathcal{C}^k(\Omega)(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ から誘導した位相はすべて一致することを証明せよ．

17.2. E, F を距離付け可能で完備な TVS とし，f を E から F への線形写像とする．f が連続であるための必要十分条件は，E の点列 $\{x_n\}$ が，E において x_n は 0 に収束し，F において $f(x_n)$ が収束するときには，$f(x_n)$ の極限が 0 になることである．このことを証明せよ．

17.3. Fréchet 空間 E からもう一つの Fréchet 空間への連続写像であって，稠密な像をもつが，準同形写像にはならないものの例を挙げよ．

17.4. 一つのベクトル空間上の二つの位相であって，共に距離付け可能で完備であり，そのうちの一つは E を TVS にし，かつ他の一つよりも粗くて，しかも同値にはならないような例を挙げよ．

17.5. 次の命題を証明せよ．

命題 17.4. LF-空間 E から Fréchet 空間 F への線形写像 f は，そのグラフが閉ならば，連続である．

17.6. $\mathcal{C}^0([0,1])$ を単位閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなすベクトル空間とし，E をその部分ベクトル空間とする．$\|\ \ \|$ を E 上の一つのノルムであって，E を Banach 空間にし，かつ $[0,1]$ 上の各点収束の位相よりも細かい位相を定義するものとする．$\mathcal{C}^m([0,1])$ を開区間 $]0,1[$ 上の $\mathcal{C}^m$ 関数 f であって，その階数 $< m+1$ のすべての導関数が $]0,1[$ の閉包 $[0,1]$ 上の連続関数に延長できるようなもの全体のなす空間とする $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$；$\mathcal{C}^m([0,1])$ の位相は，ノルムの族

$$f \mapsto p_k(f) = \sup_{0<t<1} \sum_{j=0}^{k} |f^{(j)}(t)|, \quad k < m+1$$

によって定義されるものとする．

---

1) $\mathbf{C}^n$ の点 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$ とする；$z_j = x_j + iy_j$.

$\mathcal{C}^\infty([0,1])$ が E に含まれていると仮定する．このとき，(定理 17.1 の系 4，または演習問題 17.2 を用いて) 次のことを証明せよ．$\mathcal{C}^\infty([0,1])$ から E への自然な単射は連続であり，さらにそれは，ある有限な $m \geqslant 0$ に対して $\mathcal{C}^m([0,1])$ から E への連続線形単射に延長される．この後者の単射は，E から $\mathcal{C}^0([0,1])$ への単射と合成すると，$\mathcal{C}^m([0,1])$ から $\mathcal{C}^0([0,1])$ への自然な単射と一致する．換言すれば，$\mathcal{C}^m([0,1]) \subseteq E$ であり，この自然な単射が連続になる (これらのことも証明せよ).

第II部

双 対 性.
超関数の諸空間

この第II部では，超関数の理論における主要な事柄および位相ベクトル空間の双対性の理論について述べる．超関数の主な空間 ($\mathscr{D}', \mathscr{E}', \mathscr{S}'$) はそれぞれ ($\mathscr{C}_c^\infty, \mathscr{C}^\infty, \mathscr{S}$) の双対空間として定義される．標準的な諸演算 —— 微分，$\mathscr{C}^\infty$ 関数による乗法，合成積 (convolution), Fourier 変換など —— は $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間における対応する諸演算の転置として一貫した仕方で定義される．双対性および転置に基づくこの方法によれば，これらの諸演算の概念の理解に余り知識を要求しないで済ませることができる．これは18章 (Hahn-Banach の定理), 19章 (双対空間上の諸位相), 23章 (連続線形写像の転置) によるのである．Hahn-Banach の定理を取り扱う章では，この定理が種々の問題にどのように役立つかを示すためにも数頁を割く (たとえば近似問題，関数方程式の解の存在，凸集合の分離の問題など)．20, 21, 22章では双対空間の例について述べる．20章ではいわゆる Lebesgue 空間 L^p と $L^{p'}$ の双対性を述べる (数列空間 $l^p, l^{p'}$ の双対性も述べる)．Hölder の不等式に一つの証明をあたえる．21章ではコンパクトな台をもつ連続関数の空間の双対空間すなわち Radon 測度の空間を考察し，それにつづいてコンパクトな台をもつ $\mathscr{C}^\infty$ 関数の空間の双対空間すなわち超関数の空間について述べる．22章ではもう少し抽象的な双対性の二つの例を取り扱う．すなわち多項式と形式的巾級数の双対性および $\mathbf{C}^n$ における整関数と解析的汎関数の双対性である．ついで，Fourier-Borel 変換が解析的汎関数の空間から $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数の空間の上への同形写像になるという重要な定理の証明をあたえる (この定理は整関数の空間と指数型整関数の空間の双対性についての命題と見ることもできる；これは多項式の空間と形式的巾級数の空間の双対性と近縁関係にある)．20, 21, 22 章を済ませれば，その後に述べる双対性の理論のために双対関係にある空間の例を相当多く知ったことになる．ところで，超関数全体の空間 $\mathscr{D}'$ を知っても，その部分空間をすでに知っ

ている関数空間の双対空間と同一視するための手段をまだ知らない．そのためには線形写像の転置の概念と，写像の値域が稠密ならばその転置写像は一対一であるという事実を必要とする．このようにして，$\mathcal{C}_c^\infty$ から $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\mathcal{C}_c^k$, $\mathcal{C}^k(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ および $\mathcal{S}$ への自然な埋め込み写像が稠密な像をもつことが役立つ．すなわち，これらの関数空間の双対空間は $\mathcal{D}'$ の部分空間 —— 超関数からなる空間 —— と見なすことができるのである．もちろん転置写像の概念は他の多くの観点からも重要であり，23～38章においてもそのことは明らかになる．転置することによって（線形）偏微分作用素が超関数に作用するように定義される（23章）．緩増大超関数の Fourier 変換（25章），超関数の合成積（27章）も同様である．写像の転置は35章の弱双対位相の研究（部分空間の双対空間，商空間の双対空間およびそれらの弱位相を中心に述べる）や36章の回帰性の研究（Mackey と Bourbaki に従って述べるが，回帰的Banach 空間と Montel 空間に特に重点をおく）の鍵となる．37章の主定理であるところの S. Banach の定理は，この方向の諸成果の頂点と見なすことができる．それは Fréchet 空間から Fréchet 空間への連続写像が全射になることとその転置写像が一対一かつ像が弱閉になることの同値性を示す．この定理は，やはり S. Banach によるところの，Fréchet 空間の双対空間の弱閉線形部分空間の特徴付けの定理によって補なわれる．これらの定理の重要性をはっきり示すために，(第II部の最後の) 38章において応用として E. Borel の古典的な一定理の証明と線形偏微分方程式の $\mathcal{C}^\infty$ 解の存在に関する主要結果の一つを述べる（この後者の応用は本質的には B. Malgrange によるものである）．

これらの章に入る前に，超関数の理論について一通り述べる．24章では超関数の台を定義し，構造定理を述べて証明する；28章では超関数を切り落し (cutting) と正則化 (regularization) によって近似する手法を解説する；29章ではコンパクトな台をもつ超関数の Fourier 変換の特徴付けを述べる（この特徴付けは有名な Paley–Wiener の定理である）．30章では Fourier 変換によって乗法積と合成積が入れかわることを示す．26章において関数の合成積について述べ，Minkowski–Hölder–Young の不等式の証明をあたえる．さらに Sobolev

空間に関するかなり長い一章 (31 章) を付け加えるのが適当であると判断した. Sobolev 空間は線形 (および非線形) 偏微分方程式論においてますます重要な役割を果たしつつある. ここで選んだ題材も関数解析学を主として偏微分方程式に応用することを念頭においたものである.

ところで, 位相ベクトル空間の理論を述べるのならば, いくら簡単に済ませる場合にせよ, Banach-Steinhaus の定理とその証明を省略するわけにはいかない. これを 33 章で行なう. この定理の幾つかの応用を 34 章に述べる. この定理は線形写像の同等連続集合に関係した命題であるから, 32 章で同等連続集合を導入しその主な性質を明らかにする. Banach-Steinhaus の定理は回帰性に関する章 (36 章) で大いに利用される.

18.

Hahn–Banach の定理

E を位相ベクトル空間とし，E' をその双対[1]，すなわち E 上の連続線形汎関数 (E からスカラー体への連続線形写像) の全体のなす空間とする．M を E の部分ベクトル空間とし，M には誘導位相を入れておく．そうすれば，M は TVS となり，その双対 M' を考えることができる．E 上の任意の連続線形汎関数を M 上に制限すれば，M 上の連続線形汎関数になることは明白である．すなわち，**制限写像** (restriction mapping)

$$r_M : E' \to M', \qquad r_M : E' \ni x' \mapsto x'|M \in M'$$

を得る．この制限写像 (明らかに線形) は一対一になるとは限らない．実際，恒等的には 0 でないような E' 上の線形汎関数 x' があたえられたときでも，M が $\mathrm{Ker}\, x'$ に含まれることはいくらでも起こり得る．したがって，x' が 0 でなくても，$r_M(x')$ が 0 になり得るのである．また，r_M が上への写像であるとは限らない．実際，Hausdorff TVS E であって，その上の連続線形汎関数は恒等的に 0 なものしかない，すなわち $E' = \{0\}$ となる例が存在する．しかし，M として E の有限次元部分ベクトル空間をとれば，$M \neq \{0\}$ である限り，M' が 0 だけになることはない．実際このとき M と M' は次元が等しくなり，したがって r_M は上への写像にはなり得ない．双対空間が $\{0\}$ になるような Hausdorff TVS E の注意すべき特質は，それが局所凸でないことにある．なぜなら，この章で述べるように，E が局所凸ならば，部分空間 M が何であっても，制限写像 r_M は常に上への写像になるのである．制限写像 r_M が上への写

1) ‘双対’ といったり，‘双対空間’ といったりする．

像であるということは，M 上の任意の連続線形汎関数が E 上の連続線形汎関数に延長できることを意味する．まず，E が Hilbert 空間である場合には，r_M が常に上への写像になることを示して見よう．いま y' を M 上の連続線形汎関数とする．連続性によって，y' を E における M の閉包にまで延長することができる (定理 5.1)．換言すれば，M は始めから閉であると仮定してよい．このとき，M の E における直交を M^0 とすれば，$E = M \oplus M^0$ となる ($\oplus$: Hilbert 和)．そこで，E 上の線形汎関数 x' を，M 上では y' に等しく，M^0 上では 0 になるものとして定義する．E の任意の元 x は，$x = x_1 + x_2$，$x_1 \in M$，$x_2 \in M^0$ と表わされ，E から M の上への写像 $x \mapsto x_1$ は連続である (これは M の上への直交正射影)．したがって，もし x が E において 0 に収束するならば，$x'(x) = y'(x_1)$ は複素平面上で 0 に収束する，これは y' の連続性による．すなわち，x' は E 上の連続線形汎関数であって，その M の上への制限は y' に一致する．これは，いまの場合に，r_M が上への写像であることを示している．Hilbert 空間ではない一般の局所凸空間の場合には，E を直和 $M+N$ に分解して，$x = x_1 + x_2$ として，写像 $x \mapsto x_1$ を連続にすることは不可能なことが多い．もしこのような分解が可能であったならば，M 上で定義された連続線形汎関数 (さらに，任意の連続線形写像) を E の上にまで拡張するのは全く容易である．ところで，これから示すように，局所凸空間における連続線形汎関数の拡張は，このような直和分解を用いないでもできるのである．

E を局所凸空間，M をその部分ベクトル空間とし，f を M 上の連続線形汎関数とする．f が連続であることを表現すれば，E 上で定義された連続なセミノルム p が存在して，すべての $x \in M$ について

$$|f(x)| \leqslant p(x)$$

となることである．そこで M のアフィン部分空間

$$N = \{x \in M\,;\quad f(x) = 1\}$$

を考えよう [1]．x_0 を N に属する任意のベクトルとすれば，明らかに $N - x_0$ は

1) f は M 上で恒等的には 0 にならないとする．恒等的に 0 の場合には拡張の問題は自明である．

M における f の核に等しい．この核は M の超平面であり，それを M_0 と書けば，$N=M_0+x_0$ は超平面を平行移動したものである．これもまた超平面とよぶことにする（正確には**アフィン超平面** (affine hyperplane) とよぶべきであろう．いままでの超平面は原点を通る超平面であって，それは余次元 1 の線形部分空間である）．N を知れば f が完全にきまる事に注意しよう．実際，直和分解

$$M=M_0+\mathbf{C}x_0$$

が成り立つ．ここで $\mathbf{C}x_0$ は x_0 を通る 1 次元線形部分空間（すなわち複素直線[1]）である．換言すれば，M の各元 x は唯一通りの仕方で

$$x=y+\lambda x_0, \qquad y\in M_0,\ \lambda\in\mathbf{C}$$

と書き表わされる．そして，$y\in\operatorname{Ker}f$，$f(x_0)=1$ により，

$$f(x)=\lambda f(x_0)=\lambda$$

となる．さて，p の開単位球

$$U=\{x\in E\,;\,p(x)<1\}$$

を考えよう．U は E の凸開集合であり，明らかに

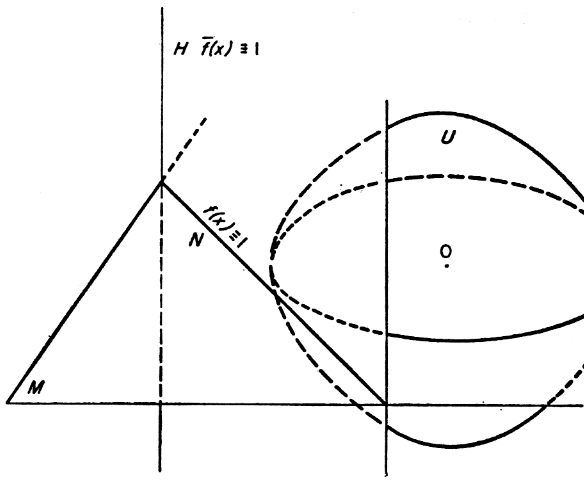


図 3

1) 幾何学的にはいままでの複素平面のことであるが，1 次元という言葉に合せて，複素直線ともいう．

$$N \cap U = \emptyset.$$

いま，E の閉（アフィン）超平面 H であって

(18.1) $$N \subseteq H, \quad H \cap U = \emptyset$$

となるものが存在したと仮定しよう．すると $H - x_0$ は E 上の一つの連続線形汎関数 $\bar{f}$ の核に等しい（命題 9.4）．さらに，H において $\bar{f} \equiv 1$ という条件をつければ，$\bar{f}$ は一意的に定まる（これは，上に述べたところの，N によって M 上の f が完全に決定されるというのと同じ理由である）．$\bar{f}$ の M への制限は，N 上では f に一致するから，M 全体で f に一致する．さらに，$H \cap U = \emptyset$ から，$\bar{f}(x) = 1$ ならば $p(x) \geqslant 1$ となる．そこで，$y \in E$ を $\bar{f}(y) \neq 0$ なる任意の元とすれば，

$$\bar{f}(y/\bar{f}(y)) = 1 \text{ だから，} p(y/\bar{f}(y)) \geqslant 1$$

となり，これは結局

(18.2) $$|\bar{f}(y)| \leqslant p(y)$$

と書ける．この式は $\bar{f}(y) = 0$ でも明らかに成り立つ．

要約すると，性質 (18.1) をもつ閉超平面 H の存在を仮定すれば，M 上の連続線形汎関数 f は E 全体の上の線形汎関数 $\bar{f}$ に拡張することができて，$\bar{f}$ は (18.2) をみたす．条件 (18.2) からただちに $\bar{f}$ の連続性がわかる．換言すれば，連続線形汎関数の拡張の問題を，互いに交わらない開凸集合と**アフィン多様体** (affine submanifold，線形部分空間を平行移動したもの) を閉超平面によって分離する問題に帰着させたのである．

下に述べる Hahn-Banach の定理の二つの形式のうちの第 2 のもの，すなわち幾何学的形式のものから第 1 のもの，すなわち解析的形式のものが出てくることをすでに証明したことになる．したがって，幾何学的形式のものだけを証明すればよい．

定理 18.1. (Hahn-Banach の定理の解析的形式)

p をベクトル空間 E 上のセミノルム，M を E の部分ベクトル空間とし，f を M 上の線形形式であって，すべて $x \in M$ について

$$|f(x)| \leqslant p(x)$$

となるものとすれば，E 上の線形形式 $\bar{f}$ であって f の拡張となるもの，すなわちすべての $x \in M$ について

$$\bar{f}(x) = f(x)$$

となり，さらに，すべての $x \in E$ について

$$|\bar{f}(x)| \leqslant p(x)$$

となるものが存在する．

定理 18.2. (Hahn–Banach の定理の幾何学的形式)

Eを位相ベクトル空間とし，Nをその部分ベクトル空間とする．ΩをEの凸開集合であって

$$N \cap \Omega = \emptyset$$

となるものとする．このとき，Eの閉超平面Hが存在して

$$N \subseteq H, \quad H \cap \Omega = \emptyset$$

となる．

注意すべきことは，定理18.1においては，Eに位相が入っていないことである．しかし，これは見掛け上のことであって，セミノルムをあたえることが，そのセミノルムによって定義される位相をあたえることになっている．定理18.2の TVS E は Hausdorff とも限らないし，局所凸である必要もない．

定理 18.2 の証明 $\Omega \neq \emptyset$ と仮定する ($\Omega = \emptyset$ ならば何も証明する必要はない)．

証明の第1段階はきわめて簡単であり，**Zorn の補題** (Zorn's lemma) の単純な応用である．いま，Eの部分ベクトル空間Lであって，条件

$$N \subseteq L, \quad L \cap \Omega = \emptyset \tag{18.3}$$

をみたすものの全体を$\mathscr{F}$としよう．$\mathscr{F}$の任意の全順序部分集合をΦとしよう (順序はもちろん包含関係 $L \subseteq L'$ である)．Φに属するすべての線形部分空間の合併はまた (18.3) を明らかにみたす．したがって Zorn の補題を適用することができて，$\mathscr{F}$は極大元を有することが結論できる．Hを一つの極大元とし

よう．証明の第2段階は，Hが閉超平面であることを示すことである．

Hが閉でなければならないことは容易にわかる．なぜなら，HはΩの補集合に含まれていて，Ωは開集合だから，Hの閉包もまたΩの補集合に含まれる．Hの閉包はNを含むようなEの部分ベクトル空間だから，Hの極大性によって，Hはその閉包と一致する．

Hが閉であることから，E/Hは Hausdorff になる (命題 4.3)．証明すべきことは，Hが超平面であること，すなわち $\dim E/H=1$ となることである．これを二つの場合にわけて行なう．

(1) スカラー体が実数体の場合．

ϕをEからE/Hの上への標準写像とする．ϕは準同形であるから，$\phi(\Omega)$はE/Hの開凸集合になる．$H\cap\Omega=\emptyset$ だから，E/Hの原点0は$\phi(\Omega)$には含まれない．そこで

$$A=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\phi(\Omega)$$

とおくと，Aは開かつ凸であり，**錐** (cone)[1] となる．もし $\dim E/H\geqq 2$ と仮定すれば，Aの境界は少なくとも一点 $x\neq 0$ を含むことになる[2]．このとき，$-x$もまたAに属さないことを示せばよい．なぜなら，もしxも$-x$もAの補集合に含まれるならば[3]，この二点によって定まる直線Lの点もすべてAの補集合に含まれることになる[4]．すると，Lの逆像 $\phi^{-1}(L)$ はEの線形部分空間であって，$L\cap A=\emptyset$ より，$\phi^{-1}(L)$ はΩと交わらない．$0\in L$ より，$\phi^{-1}(L)$ はHを含むが，$L\neq\{0\}$ から $\phi^{-1}(L)\neq H$．これはHの極大性に矛盾する．

ところで，$-x$はどうしてAに属さないか？ もし$-x$がAに属したと仮定すると，[Aは開集合だから] $-x$のある近傍VがAに含まれる．すると，$-V$はxの近傍になるが，xはAの境界点だから $y\in(-V)\cap A$ なる点yが存在

1) すなわち，任意の $\lambda>0$ に対して $\lambda A\subseteq A$

2) AはE/Hの原点の補集合に含まれる空でない集合であるが，凸であることから全体にはならない．$\dim E/H\geqq 2$ ならば，この補集合は連結集合だからAは境界点 $x\neq 0$ をもつ．

3) xがAに含まれないことは，Aが開だからよい．

4) これはAが錐であることから出る．

する．$-y \in V \subseteq A$ を得るが，A は凸だから y と $-y$ をつなぐ線分は A に含まれる．したがって，特に原点 0 が A に含まれるが，これは A の定義に反することになる．

(2) スカラー体が複素数体の場合．

ベクトル空間 E のスカラーが複素数であるときでも，E は実数体上のベクトル空間と見ることができる[1]．E に入っている位相は，明らかに [スカラー体を $\mathbf{R}$ に制限したときの] 線形構造と整合する (スカラー乗法 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ を $\mathbf{R} \times E$ に制限したときの連続性だけが検証すべきことであるが，$\mathbf{R}$ の位相は $\mathbf{C}$ の位相を $\mathbf{R}$ に誘導したものと同じだから，明白である)．さて，(1) の場合の結果から，N を含んで，Ω と交わらないような E の実超平面 H_0 が存在する．ここで実超平面とは，E を実数体上のベクトル空間と見たときの線形部分空間であって $\dim_{\mathbf{R}} E/H_0 = 1$ となることを意味する．ところで，E の元には複素数が，スカラー倍として，線形に作用することに注意する．$iN = N$ $(i = (-1)^{1/2})$ だから，$N \subseteq H_0 \cap iH_0$ である．ところが，$H_0 \cap iH_0$ は複素超平面であって Ω と交わらない．$H_0 \cap iH_0$ が複素超平面であることを検証するのは容易である．まず，$H_0 \cap iH_0$ は明らかに E の複素線形部分空間である (今度は E を複素ベクトル空間と見ての話)．$H_0 \cap iH_0$ の実余次元は $\geqslant 1$ かつ $\leqslant 2$ である．(二つの相異なる超平面の共通部分は常に余次元 2 の線形部分空間である)．かくして，$H_0 \cap iH_0$ は複素余次元 1 になる．これで Hahn–Banach の定理の証明は完成した．

解析学において，Hahn–Banach の定理はしばしば応用される．これを次に見てみよう．応用される問題の三つの型について簡単に述べるであろう．第 1 の型は近似の問題，第 2 の型は関数方程式の解の存在の問題，そして第 3 の型は凸集合の **分離** (separation) の問題である．

---

1) それはスカラー乗法 $M_s : \mathbf{C} \times E \to E$ を $\mathbf{R} \times E$ に制限して考えるだけのことである．

(1) 近似の問題

一つの局所凸空間 E とその閉部分ベクトル空間 M および M の部分ベクトル空間 M_0 を考える．そして，M の各元は M_0 に属する元の極限になっていることを証明したいとする．このような事情にある例として，E としては一つの関数空間を考え，M としては一つの関数方程式（たとえば，定数係数の偏微分方程式）の解のうち E に属するもの全体のなす線形部分空間を考え，そして M_0 としては特殊な解のクラス（たとえば，多項式解，解析関数であるような解，あるいは $\mathcal{C}^\infty$ 関数であるような解など）を考えるとよい．そして，M_0 が M で稠密であることを示したいとするのである．このような目的のためには，次の結果が役立つ．

系 1. E を局所凸空間，M を E の閉部分ベクトル空間とし，M_0 を M の部分ベクトル空間とする．このとき，M_0 が M において稠密であるための必要十分条件は，E 上の連続線形汎関数で M_0 上で恒等的に 0 になるものはすべて M 上でも恒等的に 0 になることである．

なぜなら，もし $\bar{M}_0 \neq M$ と仮定すると，M の元 x_0 であって $\bar{M}_0$ に属さないものが存在することになる．商空間 $E/\bar{M}_0$ を考え，ϕ を E から $E/\bar{M}_0$ の上への標準写像としよう．$\phi(x_0) \neq 0$ である．$E/\bar{M}_0$ において $\phi(x_0)$ で張られる一次元部分ベクトル空間を L とする．L の各元は $\lambda\phi(x_0)$ の形である [λ はスカラー]．いま L 上の線形形式 $\lambda\phi(x_0) \mapsto \lambda$ を $\dot{f}$ と書こう．$E/\bar{M}_0$ は Hausdorff だから $\dot{f}$ は L 上で連続である[1]．Hahn-Banach の定理により，$\dot{f}$ は $E/\bar{M}_0$ 全体の上の連続線形形式に拡張できる．この拡張したものも $\dot{f}$ で表わす事にする．$f = \dot{f}\circ\phi$ とおけば，f は E 上の連続線形形式であり，$\bar{M}_0$ 上で 0 になる．

1) 9 章参照．

$[\bar{M}_0 = \mathrm{Ker}\,\phi$ だから$]$．しかし $f(x_0) = \dot{f}(\phi(x_0)) = 1$ だから M 上では恒等的には 0 にならない．(証終).

系 1 の証明において，次の結果も証明されている (その証明において $\bar{M}_0 = \{0\}$ として $E/\bar{M}_0$，$\dot{f}$ を考えるとよい).

系 2. E を Hausdorff LCS とし[1]，x_0 を E の元であって $x_0 \neq 0$ とすると，E 上の連続線形形式 f が存在して $f(x_0) \neq 0$ となる．

系 2 の特別の場合として，もし $E \neq \{0\}$ ならば，E の双対空間が $\{0\}$ になることはない．すなわち，Hausdorff 局所凸空間には，自明でない[2] 連続線形形式が常に存在する．

次の結果も系 1 から明らか．

系 3. E を一つの LCS, M をその閉部分ベクトル空間とする．もし $M \neq E$ ならば，E 上の恒等的には 0 にならない連続線形形式 f であって，M 上で恒等的に 0 になるものが存在する．

(2)　存在の問題

E, F を二つの LCS とし，u を E から F への連続線形写像とする．F 上の連続線形汎関数 y' を任意にあたえたとき，$y' \circ u$ は明らかに E 上の連続線形汎関数である．このようにして，写像

$$ {}^t u : F' \ni y' \mapsto y' \circ u \in E' $$

が定義される．(E'，F' はそれぞれ E, F の双対である.) ${}^t u$ は u の**転置 (写像)** (transpose または transposed mapping) とよばれる．${}^t u$ は明らかに線形であ

1) LCS は局所凸空間 (locally convex space) の略記号．今後も用いる．
2) non-trivial，すなわち恒等的には 0 でない．

る (19 章参照). さて, ここで述べる Hahn–Banach の定理の応用は, 次の方程式

$$^t u(y') = x_0'$$

の解 $y' \in F$ の存在の証明の可能性に関することである. ここで x_0' はあたえられた E' の元である. このような問題の一つの例は,微分作用素 (これが u に当る) を取り扱う際に出会う. そのときには, x_0' はたとえば Dirac 測度であり, F' は超関数のある空間である. そのような際には, 定理 18.1 から出る次の結果がしばしば応用される.

系 4. E, F, u, $^t u$ は上に述べたものとする. いま, $\mathrm{Im}\, u$ の上で定義された線形形式

$$u(x) \mapsto x_0'(x) \tag{18.4}$$

が, F から $\mathrm{Im}\, u$ に位相を誘導したとき連続になるとする. このとき, F 上の連続線形形式 y' が存在して

$$^t u(y') = x_0' \tag{18.5}$$

となる.

証　明　(18.4) が $\mathrm{Im}\, u$ の上で連続ならば, Hahn–Banach の定理によって F 全体の上の連続線形汎関数に延長できる. その延長の一つを y' とすると, $x \in E$ に対して

$$^t u(y')(x) = y'(u(x)) = x_0'(x)$$

となる. これは (18.5) を示している. (証終).

一般には, (18.5) の解 y' は唯一つではない. いま z' を斉次方程式

$$^t u(z') = 0 \tag{18.6}$$

の任意の解とすれば, $y'+z'$ もまた (18.5) の解となる. 再び Hahn–Banach の定理を用いれば, 方程式 (18.6) が自明でない解をもつための必要十分条件は, $\mathrm{Im}\, u$ が F で稠密でないことである. これは重要な事だから, 定理 18.1 の系として述べておこう.

系 5. $E, F, u: E \to F$ および ${}^t u: F' \to E'$ は前の通りとする．このとき，次の二条件は同値である．

(*a*) $\mathrm{Im}\, u$ は F で稠密．

(*b*) ${}^t u$ は一対一．

系3から，$\overline{\mathrm{Im}\, u} \neq F$ となるための必要十分条件は，F 上の連続線形形式 $z' \neq 0$ が存在して $\mathrm{Im}\, u$ 上で恒等的に0になることである．ところで，$\mathrm{Im}\, u$ の上で恒等的に0になるということは，明らかに ${}^t u(z') = 0$ と同値である．

次のことに注意しておこう．もし $\mathrm{Im}\, u$ が F で稠密ならば，(18.4) の連続性から (18.5) の解 y' の存在を導くのに，Hahn-Banach の定理を用いる必要はない．このときには，(18.4) は F 全体の上へ一意的に拡張される．この拡張の存在は [一様] 連続性から得られる．このように，$\mathrm{Im}\, u$ が F で稠密でないときには，Hahn-Banach の定理の応用から二つの事実を得るのである．すなわち，(18.6) が自明でない解をもつことと，(18.4) の連続性から (18.5) の可解性が出ることである．

(3) 分離の問題

E を実数体上の TVS とし，H を E の一つの閉超平面とする．このとき，E/H は一次元 Hausdorff TVS，すなわち実数直線のコピーである[1]．したがって，E/H において原点0の補集合は，交わらない二つの**開半直線** (open half-line) から成る．これらの開半直線を D_1, D_2 としよう．ϕ を E から E/H の上への標準写像とする．逆像

$$\phi^{-1}(D_1) \quad と \quad \phi^{-1}(D_2)$$

は，H によって決定された E の二つの**開半空間** (open half-space) であり，これらの閉包は，H によって決定された二つの**閉半空間** (closed half-space) で

1) すなわち，位相もこめて $\mathbf{R}$ に同形．

ある．Eの二つの部分集合AとBが，Hによって**分離される** (separated) (あるいは，**真に分離される** (strictly separated)) とは，AがHによって決まる一つの閉半空間 (あるいは，開半空間) に含まれ，BがHで決まる他の閉半空間 (あるいは，開半空間) に含まれることをいう．

これらの概念を用いて，この節で取り扱う問題の型を定式化しよう．一つのTVS Eに含まれる二つの交わらない凸集合は，閉超平面で分離あるいは真に分離できるであろうか？

［訳者挿入］ 以下に続く事柄の取り扱いのためには上の定義だけでは (見掛け上) 不十分なので，少々付け加える．TVS Eの二つの部分集合A, Bを分離するために用いる閉超平面としては，アフィン閉超平面，すなわち余次元1の閉部分ベクトル空間およびそれを平行移動したものを考える．余次元1の閉部分ベクトル空間は，E上の恒等的には0にならない連続線形汎関数の零点として定義されるから，分離の定義は次のようにすればよい．

定義 18.1. 実数体上のTVS Eの二つの部分集合A, Bが連続線形汎関数fによって分離されるとは，定数cが存在して，fはA上では常に$\geqslant c$となり，B上では常に$\leqslant c$となることをいう．fによって真に分離されるとは，定数cが存在して，A上では$f>c$, B上では$f<c$となることをいう．いま，$H=\{x \in E; f(x)=c\}$とおけば，Hはアフィン閉超平面になるが，上の "fによって" という代りに，"Hによって" ともいう．

閉 (あるいは開) 半空間も，fを用いて定義できる．

$$\{x; f(x) \geqslant c\}, \quad \{x; f(x) \leqslant c\}$$

$$(\text{あるいは } \{x; f(x) > c\}, \quad \{x; f(x) < c\})$$

である．これらが，対(つい)としては，$H=\{x; f(x)=c\}$にしか依存しないことは，fがHによって，たかだかスカラー倍を除いて，決定されることに注意すればよい．さて本文にもどろう．

分離の問題に肯定的解答をあたえるためには，集合A, Bにさらに条件を付けることが必要なことは見やすい．

命題 18.1. Eを実数体上のTVSとし，A, BをEの交わらない二つの凸集合とする．もしAが開であり，Bが空でなければ[1]，Eの閉超平面Hが存在

1) Aもまた空でないとする．

して A と B を分離する．

証　明　集合 A, B のベクトル差 $A-B$ は E の開集合である（なぜなら，それは開集合 $A-y$ の y が B を動いたときの合併だから）．それはまた凸集合であって，原点を含まない．定理 18.2 によって，（原点 0 を通る）閉超平面 H であって，$A-B$ と交わらないものが存在する．これはいい換えると，E 上の連続線形形式 f が存在して $f(A-B)>0$ となる．この意味は，すべての $x\in A$ と $y\in B$ に対して，$f(x)>f(y)$ が成り立つことになる．B は空でないから，$a=\inf_{x\in A}f(x)>-\infty$．このとき，超平面 $H_1=\{z\in E\,;\,f(z)=a\}$ は明らかに A と B を分離する．

さらに，B も開ならば，A と $\bar{B}$（B の閉包）を分離する閉超平面 H_1 が存在するが，この H_1 は明らかに A と B を真に分離する．（証終）．

もし B が開集合でなければ，一般には，A と B を真に分離する閉超平面は存在しない．たとえ E が有限次元であっても，また $\bar{A}$ と $\bar{B}$ が交わらなくても同様である（演習問題 18.2 参照）．

命題 18.2.　E を実数体上の局所凸 TVS とし，A, K を E の二つの交わらない凸部分集合とする．もし，A が閉で，K がコンパクトならば，A と K を真に分離するような E の閉超平面が存在する．

証　明　$\mathfrak{B}$ を E における 0 の基本近傍系であって，0 の閉凸平衡な近傍からなるものとする．各 $V\in\mathfrak{B}$ に対して，Ω_V を $A+V$ の閉包の補集合とする．V が $\mathfrak{B}$ の中を動くとき，Ω_V の集まりは K の開被覆をなす．実際，x を K の任意の一点とすると，A の補集合 Ω は x の一つの開近傍であり，したがって $V\in\mathfrak{B}$ が存在して，$V+V+x$ が Ω に含まれる．V は平衡的だから，これは $V+x\subseteq \complement(A+V)$ を意味する[1]．したがって，もちろん $V+x$ の内部は $A+V$

1)　念のために書けば，$(V+V+x)\cap A=\phi \Rightarrow (V+x)\cap(A+V)=\phi$．これは，結論を否定して，$V=-V$ を用いると矛盾になることが容易にわかる．

と交わらず，その閉包とも交わらない．[これは，$\complement\overline{A+V}$ が $V+x$ の内部を含み，したがって x の近傍であることを示す．x は任意だから，$\{\Omega_V\,;\,V\in\mathfrak{B}\}$ は K の開被覆である.] そこで，K のコンパクト性を用いると，有限個の $V\in\mathfrak{B}$ が存在して，それに対応する Ω_V が K の開被覆をなす．W として，この有限個の V の共通部分をとれば，$K\subseteq\Omega_W$ となる．そこで，E における 0 の開凸平衡的近傍 U を，$U+U\subseteq W$ となるようにとる．すると，K は $A+U+U$ の閉包の補集合に含まれることになり，したがって $K+U$ は $A+U$ の補集合に含まれる．U は開だから，$A+U$ と $K+U$ はともに開である．A, K, U は凸だから，$A+U$ と $K+U$ はともに凸になる．これらは交わらないから，命題 18.1 の最後の部分を適用すると，$A+U$, $K+U$ は一つの閉超平面によって真に分離される．したがって，もちろん A と K は真に分離される．

系 1. 実数体上の局所凸 Hausdorff [1] TVS においては，閉凸集合はすべて，それを含む閉半空間の共通部分に等しい．

実際，A を閉凸集合とすれば，A の補集合の任意の点はコンパクトだから，A とその点を真に分離する閉超平面が存在する (命題 18.2).

系 2. 実数体上の局所凸 Hausdorff [1] 空間 E において，線形部分空間 M の閉包は，M を含むあらゆる閉超平面の共通部分に等しい [2].

$x_0\notin\bar{M}$ とする．命題 18.2 により，$\bar{M}$ と x_0 を真に分離するような閉超平面が存在する．この閉超平面の方程式を $f(x)=a$ としよう．M は集合 $\{x\,;\,f(x)<a\}$ に含まれ，$f(x_0)>a$ としてよい．そこで，いま $y\in M$ が存在して $f(y)\neq 0$ と仮定してみよう．$b=a/f(y)$ とおけば，$by\in M$ で $f(by)=a$ となるから，M が集合 $\{x\,;\,f(x)<a\}$ に含まれる事に矛盾する．したがって $M\subseteq \mathrm{Ker}\,f$，かつ $x_0\notin\mathrm{Ker}\,f$．(証終).

1) Hausdorff という条件は不要.
2) 以下にも証明を述べるが，これは既出の定理 18.1 の系 1 そのものである.

さて，これらの結果に対応することを，スカラー体が複素数体Cであるときにも求めておくことは，後のためにも重要である．しかしながら，複素数体上の TVS においては，超閉面による分離という概念が全く意味をなさない．なぜなら，（複素）閉超平面の補集合はつねに連結している[1]ので，実数体上の場合のように，その片側というのは無意味になってしまうからである．もちろん，命題 18.2 の系 1 の複素の場合は意味があり，実際成り立つ．

系 3. Eを複素数体上の局所凸 TVS とし，Mをその部分ベクトル空間とする．Mの閉包は，Mを含むすべての閉超平面の共通部分に等しい[2]．

証　明　$x^0 \notin \bar{M}$ とすると，Eを実数体上の TVS とみなしたときのEの超平面Hが存在して，$M \subseteq H$ かつ $x^0 \notin H$ とできる．このとき $H \cap iH$ は（Eを複素数体上の TVS とみなしたときの）Eの閉超平面であって，Mを含み，x^0を含まない（Mを含むことは $M = iM$ からわかる）．

次の結果は後のために有用である．

命題 18.3. Eを複素数体上のベクトル空間とし，$\mathcal{T}_j$ $(j=1,2)$ をE上の二つの局所凸 Hausdorff 位相（Eの C-線形構造[3]と整合するとする）であって，E上の連続線形形式はこれら二つの位相 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ に対して一致するものとする．このとき，AをEの凸集合とすれば，Aの閉包は，$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ どちらに対しても同じになる．

証　明　fをEから実数体 **R** への線形写像，すなわち，E上の **R**-線形形式とする．各 $x \in E$ に対して

$$g(x) = 1/2(f(x) - if(ix))$$

とおくと，任意の複素数 $\gamma = \alpha + i\beta$ について

1)　これは $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ の連結性から出る．

2)　前頁脚注 2 参照．

3)　C-linear structure，すなわちスカラー体をCとしたときの線形構造．Cの代りにRとしたものが R-線形構造．

$$
\begin{aligned}
2g(\gamma x) &= f(\gamma x) - if(i\gamma x) = f(\alpha x + \beta ix) - if(\alpha ix - \beta x) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(ix) - i\alpha f(ix) + i\beta f(x) \\
&= \alpha(f(x) - if(ix)) + i\beta(f(x) - if(ix)) \\
&= 2\gamma g(x)
\end{aligned}
$$

となる．これは，g が $\mathbf{C}$–線形形式であることを示している．f が実数値関数であるから，$\overline{g(x)} = 1/2(f(x)+if(ix))$ となり，したがって

$$f(x) = g(x) + \overline{g(x)}$$

となる．この等式と g の定義から，f が連続であるための必要十分条件は，g が連続であることになる．

このことから，位相 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ について，E 上の連続 $\mathbf{R}$–線形形式は一致することがわかる．このことはまた，閉半空間が $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ について同じになり，命題 18.2 の系 1 からただちに命題 18.3 が出る．

演 習 問 題

18.1 (E, p) をノルム空間，M を E の線形部分空間とする．p を M に制限したものを p_M とし，ノルム空間 (M, p_M) を考える．f をノルム空間 (M, p_M) 上の連続線形形式とする．このとき，ノルム空間 (E, p) 上の連続線形形式 $\bar{f}$ であって，すべての $x \in M$ に対して $\bar{f}(x) = f(x)$ となり，

$$\sup_{x \in E,\, p(x)=1} |\bar{f}(x)| = \sup_{x \in M,\, p_M(x)=1} |f(x)|$$

となるものが存在することを証明せよ．

18.2. $\mathbf{R}^3$ の次のような部分集合 C を考える：

$$C = \{(x, y, z)\,;\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ xy \geqslant z^2\}.$$

このとき，直線 $D = \{(x, y, z)\,;\, x = 0,\ z = 1\}$ は C とは交わらないが，D を含んで C とは交わらないような平面は存在しない．このことを証明せよ．（命題 18.1 の証明につづく注意参照.）

18.3. $l_{\mathbf{R}}^1$ を，実数列 $\sigma = (\sigma_n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ で $\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n| < +\infty$ となるもの全体のなす Banach 空間とする (11 章例 IV 参照)．数列 $(1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ によって生成される 1 次元部分空間，すなわち直線 $\{\sigma \in l_{\mathbf{R}}^1\,;\,$ すべての $n > 0$ について $\sigma_n = 0\}$ を D で表わそう．また，集合

$$A = \{\sigma \in l_{\mathbf{R}}^1 ; \sigma_0 \geqslant |a_n\sigma_n - b_n|, \ n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

を考える. この A の定義で, (a_n), (b_n) $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は実数列とする. このとき, (a_n), (b_n) を適当にえらぶことにより, $A-D$ は $l_{\mathbf{R}}^1$ において稠密になり, A は D と交わらないようにできることを証明せよ. また, このとき, A と D を分離するような $l_{\mathbf{R}}^1$ の閉超平面は存在しないことを示せ.

18.4. 実係数の1変数多項式全体のなすベクトル空間を E とする (したがって, E は実数体上のベクトル空間である). 多項式 $a_dX^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, $a_d \geqslant 0$ [1] $(d = 0, 1, 2, \cdots)$ の集合を C とする. このとき, C は凸集合であって, $C \cap (-C) = \{0\}$, $C \cup (-C) = E$ となることを証明せよ. また, このとき, E の [0を通る] 超平面 H で, その片側に C を含むものは存在しないこと (すなわち, E の任意の超平面 H に対して, E から E/H の上への標準写像による C の像は, 半直線には含まれないこと) を証明せよ. (E には位相を入れていないこと, したがって H が閉であるという条件もないことに注意せよ.)

18.5. 実数体上のベクトル空間 E の部分集合 C が**錐** (cone) であるとは, すべての $\rho > 0$ に対して $\rho C \subseteq C$ となることをいう (前問題参照). C が凸錐であるとは, 凸集合でありかつ錐であることをいう. 次のことを証明せよ.

(a) E の部分集合 C が凸錐であるためには, C が錐であって, かつ $C + C \subseteq C$ となることが必要十分である.

(b) C が凸錐とすれば, C によって張られる E の部分ベクトル空間は $C - C$ に等しい.

(c) 凸錐 C に含まれる最大の部分ベクトル空間は $C \cap (-C)$ に等しい.

18.6. 実数体上のベクトル空間 E に含まれる一つの錐を P とする (前問参照). 関係 $x - y \in P$ を $x \geqslant y$ で表わそう. P が**頂点付き** (pointed) とは, E の原点 0 が P に含まれることをいう. P が**尖出** (salient) であるとは, P に含まれる部分ベクトル空間が $\{0\}$ しかないことをいう. このとき, 次の二条件は同値であることを証明せよ.

(a) P は頂点付きの尖出な凸錐である.

(b) $x \geqslant y$ は順序関係 (すなわち, 反射的, 推移的な関係であって, $x \geqslant y$ かつ $y \geqslant x$ ならば $x = y$ となる) であって, E の線形構造と整合する (すなわち, $x \geqslant y$ ならば, $x + z \geqslant y + z$, $\rho x \geqslant \rho y$ がすべての $z \in E$ とすべての $\rho > 0$ について成り立つ).

いま, $\omega(x, y)$ を E の線形構造と整合する一つの順序関係とすれば, E の非負な元の集合

1) すなわち, 最高次の係数が $\geqslant 0$ となる多項式のことである. $a_d = 0$ となるのは, 0 という多項式にほかならない.

$$\Omega = \{x \in E\,;\, \omega(x, 0)\}$$

は頂点付きの尖出な凸錐になることを示せ．このとき，ω によって定義される順序が**全順序** (total order) (すなわち，E の任意の二元 x, y について，$\omega(x, y)$, $\omega(y, x)$ のどちらかが成り立つ) となるとすれば，Ω についてどのようなことがいえるか？

18.7. E を実数体上のベクトル空間とし，E^* をその代数的双対，すなわち，線形写像 $E \to \mathbf{R}$ の全体のなす ($\mathbf{R}$ 上の) ベクトル空間とする．$x \geqslant y$ を，E の線形構造と整合する一つの順序関係とし，非負元全体のなす錐を P とする：

$$P = \{x \in E\,;\, x \geqslant 0\}.$$

線形形式 $x^* \in E^*$ が**正** (positive)[1] であるとは，すべての $x \in P$ に対して $x^*(x) \geqslant 0$ となることをいう．E 上の正線形形式 x^* の全体 P^* は，E^* における頂点付きの尖出な凸錐になることおよび，$P^* \cup (-P^*) = E^*$ となるのは $\dim E = 1$ のときそのときに限ることを証明せよ．

18.8. Hahn-Banach の定理の "補い" として，次の定理を証明せよ．

定理 18.3. E を実数体上のベクトル空間，M を E の線形部分空間とし，p を E 上の実数値関数であって，すべての $x, y \in E$ と $\rho > 0$ に対して

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \qquad p(\rho x) = \rho p(x)$$

が成り立つものとする．いま，$f: M \to \mathbf{R}$ を，M 上の線形汎関数であって，すべての $x \in M$ について

$$f(x) \leqslant p(x)$$

が成り立つものとすると，E 上の線形汎関数 $\bar{f}: E \to \mathbf{R}$ が存在して，すべての $x \in M$ について $\bar{f}(x) = f(x)$ となり，すべての $x \in E$ に対して $\bar{f}(x) \leqslant p(x)$ が成り立つ．(p は必ずしも $\geqslant 0$ とは限らないことに注意)[2]

18.9. E と M とは定理 18.3 におけると同様にする．いま，$x \geqslant y$ を E の線形構造と整合する一つの順序関係 (E 上の) とし，$P = \{x \in E\,;\, x \geqslant 0\}$ を E の非負元全体のなす錐とする．f を M 上の線形形式であって正とする (これは，すべての $z \in M \cap P$ に対して $f(z) \geqslant 0$ となることを意味する)．さて，任意の $x \in E$ に対して $y \in M$ が存在して $y \geqslant x$ となると仮定しよう[3]．このとき，E 上の関数

$$x \mapsto p(x) = \inf_{y \in M, y > x} f(y)$$

1) 正確には非負 (non-negative) というべきであろう．

2) たとえば，P 自身が一つの線形汎関数でもよいから．

3) このとき，M は E と共終 (cofinal) であるという．

は E 上いたるところ有限になり，次の性質をもつことを証明せよ．

(i)　$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \quad p(\rho x) = \rho p(x), \quad \forall x, y \in E, \quad \rho > 0.$

(ii)　$p(x) \geqslant 0, \quad \forall x \geqslant 0.$

(iii)　$p(x) = f(x), \quad \forall x \in M.$

また，定理 18.3 を用いて，f の拡張になるような E 上の正線形形式 $\bar{f}$ が存在することを証明せよ．

18.10. 次の定理 (M. Krein の定理) を証明せよ．

定理 18.4. Eを Hausdorff TVS, $x \geqslant y$ を E 上の［線形構造と整合する］順序関係，Pを非負元のなす錐，MをEの線形部分空間，fをM上の正線形形式とする．いま，Pの内部に属するような一点 $x_0 \in P \cap M$ が存在すると仮定すれば，f の拡張となるような E 上の連続正線形形式 $\bar{f}$ が存在する．

（ヒント：任意の $x \in E$ に対して $x \leqslant \rho x_0$ となるような $\rho > 0$ の存在を証明し，次に演習問題 18.9 を適用せよ.）

19.

双対空間上の種々の位相

E を複素数体上の一つの TVS とし，E' をその双対空間，すなわち E 上のすべての連続線形形式（汎関数）[E から複素平面 $\mathbf{C}$ への連続線形写像] のなすベクトル空間とする．$x' \in E$ に対して，今後は，記号

$$\langle x', x \rangle$$

により，x' の $x \in E$ における値を表わすことにする．後になればわかるように，この値を

$$\langle x, x' \rangle$$

と書くこともまた正当な理由があるのである．

定義 19.1. E の部分集合 A があたえられたとき，E' の部分集合

$$\{x' \in E';\ \sup_{x \in A} |\langle x', x \rangle| \leqslant 1\}$$

を，A の**極**または**極集合** (polar または polar set) といい，A^0 で表わす[1]．

極集合の幾つかの性質を挙げよう：

(1) $A \subseteq E$ の極 A^0 は E' の平衡的凸集合である．

(2) $A \subseteq B$ ならば $B^0 \subseteq A^0$；$\rho > 0$ ならば $(\rho A)^0 = (1/\rho) A^0$；
$(A \cup B)^0 = A^0 \cap B^0$.

(3) A が錐，すなわち

$$x \in A \text{ のとき，} \lambda x \in A \quad (\forall \lambda > 0)$$

1) 場合によっては，$A^0 = \{x' \in E';\ \inf_{x \in A} \mathrm{Re}\langle x', x \rangle \geqslant -1\}$ と定義した方が都合のよいこともある．

とすれば，

$$A^0 = \{x' \in E';\ \forall x \in A, \langle x', x\rangle = 0\}$$

実際，A が錐として，すべての $x \in A$ に対して，$|\langle x', x\rangle| \leqslant 1$ とするならば，すべての $x \in A$ とすべての $\lambda > 0$ に対して $|\langle x', \lambda x\rangle| \leqslant 1$．これは $|\langle x', x\rangle| \leqslant 1/\lambda$ と同じであり，λ は任意 > 0 だから，$\langle x', x\rangle = 0$ を意味する．

このように，A が錐，特に A が E の部分ベクトル空間ならば，その極 A^0 は，A 上で恒等的に 0 になるような E 上の連続線形形式全体になる．これを **A の直交** (orthogonal of A) という．この定義によれば，E の線形部分空間の直交は，E の双対空間 E' の部分集合となることに注意しなければならない．実際には，この部分集合が E' の線形部分空間になることは明らかである；事実，《A が E の一つの錐ならば，A^0 は E' の部分空間になる》．[1]

命題 19.1. B が E の有界部分集合ならば，B の極 B^0 は E' の吸収的部分集合となる．

証明 B が有界とすれば，E 上の任意の連続線形汎関数 x' は B 上で有界である (命題 14.2 の系)．すなわち，定数 $M(x') > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in B} |\langle x', x\rangle| \leqslant M(x')$$

となる．この不等式を解釈し直せば，$M(x')^{-1}x' \in B^0$．(証終).

さて，E の双対空間 E' 上の位相について述べよう．E の有界な部分集合の一つの族 $\mathfrak{S}$ であって，次の二条件をみたすものを考える．

($\mathfrak{S}_1$) A, B ともに $\in \mathfrak{S}$ ならば，$C \in \mathfrak{S}$ が存在して $A \cup B \subseteq C$.

($\mathfrak{S}_2$) $A \in \mathfrak{S}$ とし，λ をスカラーとすれば，$B \in \mathfrak{S}$ が存在して，$\lambda A \subseteq B$.

このとき，$\mathfrak{S}^0$ によって，$\mathfrak{S}$ に属する集合の極集合のすべてから成る族を表わすことにしよう．$\mathfrak{S}^0$ の元は，E' の部分集合であって $A^0, (A \in \mathfrak{S})$ の形である．

$A \in \mathfrak{S}$ はすべて有界であるとしたから，$A^0 \in \mathfrak{S}^0$ はすべて吸収的である (命

1) 前頁の極集合の性質 (3) から明らか．

題 19.1). $A^0, B^0 \in \mathfrak{S}^0$ を，それぞれ $A, B \in \mathfrak{S}$ の極とすれば，

$$A^0 \cap B^0 = (A \cup B)^0$$

となり，また $C \in \mathfrak{S}$ が存在して $A \cup B \subseteq C$ となるから，このとき

$$C^0 \subseteq (A \cup B)^0 \subseteq A^0 \cap B^0$$

を得る．$\rho > 0$ とし，$A \in \mathfrak{S}$ とすれば，$B \in \mathfrak{S}$ が存在して $B \supseteq \rho^{-1}A$ となるから

$$B^0 \subseteq \rho A^0$$

を得る．これらの性質は，$\mathfrak{S}^0$ が E' 上の一つの局所凸位相に関する 0 の基本近傍系にとることができることを示している（73 頁の条件 (*) と (**) を見よ）．

定義 19.2. E' 上の **$\mathfrak{S}$-位相** ($\mathfrak{S}$-topology) とは，$\mathfrak{S}$ に属する部分集合の極の全体 $\mathfrak{S}^0$ を 0 の基本近傍系とすることによって定義される局所凸位相のことをいう．

命題 19.2. E' 上のフィルター $\mathcal{F}'$ が E' の元 x' に，$\mathfrak{S}$-位相に関して収束するとは，$\mathfrak{S}$ に属する各集合 A 上で，$\mathcal{F}'$ が x' に一様収束することである．

$\mathcal{F}'$ が集合 $A \subseteq E$ の上で一様に x' に収束するという意味は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，集合 $M' \in \mathcal{F}'$ が存在して

$$\sup_{x \in A} |\langle x', x\rangle - \langle y', x\rangle| \leqslant \varepsilon, \quad \forall y' \in M'$$

となることである．容易にわかるように，$\mathfrak{S}$-位相に関する 0 の基本近傍系としては，次の形の集合全体をとればよい．

$$W_\varepsilon(A) = \{x' \in E' \,;\, \sup_{x \in A} |\langle x', x\rangle| \leqslant \varepsilon\}$$

ただし ε は実数 > 0 のすべてをわたるとする.[1] したがって，命題 19.2 の証明は自明である．

上述のような理由によって，E' 上の $\mathfrak{S}$-位相は，**$\mathfrak{S}$ に属する各集合上の一様**

1) 本当をいえば，$\varepsilon=1$ として十分であることは明らかであるが，収束するという感じを出すためにこのようにするだけである．

収束位相 (topology of uniform convergence over the sets belonging to $\mathfrak{S}$) とよばれる. この位相を入れたとき, E' を $E'_{\mathfrak{S}}$ と書くことにする. さて, $\mathfrak{S}$-位相の主な例を挙げよう.

例 I. 《**弱双対位相** (weak dual topology), あるいは, E' 上の**弱位相** (weak topology)》.

これは, E のすべての有限集合からなる族 $\mathfrak{S}$ に対応する $\mathfrak{S}$-位相である. この位相は通例 $\sigma(E',E)$ という記号で表わす. E' にこの位相を入れたものを E'_σ と書く. E' 上の連続線形汎関数 x' [のフィルター] が 0 に**弱収束する** (converge weakly) とは, E の各点 x におけるその値 $\langle x',x\rangle$ が複素平面において 0 に収束することをいう. 換言するならば, E' 上の弱位相とは, E 上の連続線形汎関数を単に E 上の関数と見なしたときの, E 上の**各点収束の位相** topology of pointwise convergence) である. しかしながら, 弱位相はこれから重要な役割を演ずることになる. E'_σ における 0 の基本近傍系としては, 次の形の集合の族を考えればよい:

$$W_\varepsilon(x_1,\dots,x_r)=\{x'\in E';\ |\langle x',x_j\rangle|\leqslant\varepsilon,\ j=1,\dots,r\}.$$

ここで, $\{x_1,\dots,x_r\}$ は E のあらゆる有限部分集合の族をわたるとする; また, ε はすべての実数 >0 をわたるとする.

例 II. 《**凸コンパクト収束の位相** (topology of convex compact convergence)》.

これは, $\mathfrak{S}$ として, E のすべての凸コンパクト集合の族を考えたときの, $\mathfrak{S}$-位相である. この位相を $\gamma(E',E)$ で表わすことにする. この位相を入れたとき, E' を E'_γ と表わすことにする.

例 III. 《**コンパクト収束の位相** (topology of compact convergence)》.

これは, $\mathfrak{S}$ として, E のあらゆるコンパクト集合の族をとったときの, $\mathfrak{S}$-位相である. この位相は, "E の各コンパクト集合上の一様収束の位相" または "コンパクト収束の位相" とよばれる. E' にこの位相を入れたものを E'_c で表わ

す．この位相が，凸コンパクト収束の位相と常に一致するとは限らないことに注意する必要がある．しかしながら，一つの重要な場合，すなわち E が Fréchet 空間の場合には，これらの位相は一致することを後に述べる．

例 IV. 《**強双対位相** (strong dual topology)，または，E' 上の**強位相** (strong topology)》．

E' 上の位相としては，弱位相とこの強位相とが最も重要な $\mathfrak{S}$-位相である．この位相は，$\mathfrak{S}$ として，E のあらゆる有界集合の族をとったときの $\mathfrak{S}$-位相である．したがって，E 上の一つのフィルターが 0 に**強収束する** (converge strongly) のは，それが E の各有界集合上で一様収束するときである．このため，E' 上の強位相は，**有界収束の位相** (topology of bounded convergence) とよばれることもある．この強位相を E' に入れたとき，E'_b と表わすことにする (b は bounded の略号)．

さて，一般の場合にもどって，いま $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ を E の有界集合の二つの族であって，共に条件 ($\mathfrak{S}_1$), ($\mathfrak{S}_2$) をみたすものとしよう．もし $\mathfrak{S}_1 \supseteq \mathfrak{S}_2$ とすれば，$\mathfrak{S}_1$-位相は $\mathfrak{S}_2$-位相よりも細かいことになる．このことから，上に導入された E' 上の四つの例の比較関係を得る．すなわち，

$$\sigma(E', E) \leqslant \gamma(E', E) \leqslant c(E', E) \leqslant b(E', E).$$

ここで，c および b は，それぞれ compact および bounded の最初の文字である [c はコンパクト収束，b は有界収束の位相を表わす]．

命題 19.3. もし，$\mathfrak{S}$ に属する集合の合併が E で稠密ならば，E' 上の $\mathfrak{S}$-位相は Hausdorff である．

証　明　$x' \in E'$ であって $x' \neq 0$ とすれば，適当な集合 $B \in \mathfrak{S}$ と B に属する点 x が存在して $|\langle x', x\rangle| > 1$ となる[1]．したがって $x' \notin B^0$．

1) $x' \neq 0$ から，集合 $\{y \in E ; |\langle x', y\rangle| > 1\}$ は空でない開集合になり，したがってこのような B と x が存在する．

系. 弱位相，強位相，凸コンパクト収束の位相，コンパクト収束の位相は，すべて E' 上の Hausdorff 位相である．

命題 19.4. (E,p) をノルム空間とし，E' を E の双対とする．このとき E' 上の強位相は次のノルム p' によって定義される．

$$p'(x') = \sup_{p(x)=1} |\langle x', x\rangle|.$$

実際，E' 上のノルム p' の閉単位球は (E,p) の単位球の極集合になるからよい．

E, F を二つの TVS とし，u を E から F への連続線形写像とする．すでに述べたように (18 章 228 頁)，

$${}^t u : F' \ni y' \mapsto y' \circ u \in E'$$

は，F' から E' への線形写像であって，u の転置とよばれるものである ($y' \circ u$ は合成写像

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{y'} \mathbf{C}$$

を表わす)．E', F' に $\mathfrak{S}$–位相を入れたとき，${}^t u$ の連続性はどうなるであろうか．いま，$\mathfrak{S}, \mathfrak{H}$ をそれぞれ E および F の有界集合の族であって，性質 $(\mathfrak{S}_1)$, $(\mathfrak{S}_2)$ をみたすものとしよう．E および F の双対空間に $\mathfrak{S}, \mathfrak{H}$ によって位相を入れたものを，それぞれ $E'_{\mathfrak{S}}, F'_{\mathfrak{H}}$ で表わすことにする．このとき，${}^t u : F'_{\mathfrak{H}} \to E'_{\mathfrak{S}}$ が連続であるとは，任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $B \in \mathfrak{H}$ が存在して，極集合の間に ${}^t u(B^0) \subseteq A^0$ が成り立つことを意味する．これは換言すると，すべての $x \in A$ とすべての $y' \in B^0$ について

$$|\langle {}^t u(y'), x\rangle| \leqslant 1$$

となることである．転置写像の定義によって，これは

$$|\langle y', u(x)\rangle| \leqslant 1 \tag{19.1}$$

と同値である．もし $u(A) \subseteq B$ ならば，明らかに (19.1) が成り立つから，${}^t u$ の連続であるための十分条件として次の命題を得る．

命題 19.5. E, F を二つの TVS とし，$\mathfrak{S}$ および $\mathfrak{H}$ をそれぞれ E, F 上の有界集合の族であって性質 $(\mathfrak{S}_1), (\mathfrak{S}_2)$ をみたすものとする（240 頁）．また，u を E から F への連続線形写像であって，任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $B \in \mathfrak{H}$ が存在し $u(A) \subseteq B$ となるものとする．このとき，u の転置 ${}^t u$ は写像

$$ {}^t u : F'_{\mathfrak{H}} \to E'_{\mathfrak{S}} $$

として連続になる．

ところで，A が有限集合（あるいは凸コンパクト，コンパクト，有界）であれば，$u(A)$ もまた同様であることに注意しよう．このことから，命題 19.5 によって，次の結果を得る．

系. E, F を二つの TVS とし，u を E から F への連続線形写像とする．このとき転置写像

$$ {}^t u : F' \to E' $$

は，双対空間 E', F' に弱位相（あるいは凸コンパクト収束の位相，あるいはコンパクト収束の位相，あるいは強位相）を入れたとき連続になる．

さて，E からその双対空間の代数的双対 E'^* への標準写像について述べよう．この写像による $x \in E$ の像とは，E' 上の線形汎関数であって，《点 x における値》を見ることである．すなわち，汎関数

$$ x' \mapsto \langle x', x \rangle $$

である．この E' 上の線形形式を v_x で表わすことにしよう．v_x が $E'_{\mathfrak{S}}$ 上で連続になるのはどういう時であろうか．v_x が連続になるということは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A \in \mathfrak{S}$ が存在して

$$ \sup_{x' \in A^0} |v_x(x')| \leqslant \varepsilon $$

となることを意味する．これを書き直すと

$$ \sup_{x' \in A^0} |\langle x', (1/\varepsilon)x \rangle| \leqslant 1. $$

これは，$(1/\varepsilon)x \in A$ ならば明らかに成り立つ．このことから次の結果を得る．

命題 19.6. $\mathfrak{S}$ を E の有界集合の族であって，性質 $(\mathfrak{S}_1)$, $(\mathfrak{S}_2)$ をみたすものとする．もし $\mathfrak{S}$ が E の被覆になっているならば，E から E'^* への標準写像

$$x \mapsto v_x \quad (v_x : x' \mapsto \langle x', x \rangle)$$

は E を $E'_{\mathfrak{S}}$ の双対 $(E'_{\mathfrak{S}})'$ の中に写す．

これから後は，常に $\mathfrak{S}$ が E の被覆になっていると仮定する．

一般には，E から $(E'_{\mathfrak{S}})'$ への標準写像は上への写像でもなければ一対一でもない．しかしながら，Hahn–Banach の定理によって，次のことが成り立つ．

命題 19.6. E を局所凸な Hausdorff TVS とすれば，E から $E'_{\mathfrak{S}}$ の双対空間への標準写像は一対一である．

証　明　$x \in E, x \neq 0$ とすると，E 上の連続線形形式 x' が存在して $\langle x', x \rangle \neq 0$ (定理 18.1 系 2)．これは，v_x が恒等的には 0 でないことを示している．

後に述べるように，E' に弱位相または凸コンパクト収束の位相を入れたときには，E から E' の双対への標準写像は実際には上への写像になる．すなわち，E は弱双対 E'_σ あるいは E'_γ の双対空間と見なすことができるのである．

演　習　問　題

下に述べるすべての演習問題において，E は複素数体 C 上の局所凸 Hausdorff 空間であるとする．

19.1. E に位相 $\sigma(E, E^*)$ を入れる．すなわち，セミノルムの族

$$p_{S^*}(x) = \sup_{x^* \in S^*} |x^*(x)|, \quad S^* : E^* \text{ の有限集合}$$

(E^* は E の代数的双対) によって定義される位相を考える．このとき次のことを証明せよ．

(i)　E の [位相的] 双対空間は E^* に一致する．

(ii)　E の任意の有界集合は有限次元部分空間に含まれる．

(iii)　E の部分ベクトル空間はすべて閉である．

(iv)　E のすべての部分ベクトル空間は位相的補空間をもつ．

19.2. E' を E の双対とし，E^* を E の代数的双対とする．E' に弱位相 $\sigma(E', E)$ を入れて考えるとき，E' の完備化は，E^* に位相 $\sigma(E^*, E)$ を入れたものと標準的に同形にな

ることを証明せよ (位相 $\sigma(E^*, E)$ はセミノルムの族

$$p_S(x^*) = \sup_{x \in S} |x^*(x)|, \quad S \text{ は } E \text{ の有限集合}$$

によって定義されるものである).

19.3. 次の性質は同値であることを証明せよ.

(a) $\dim E$ が有限.

(b) E'_σ が可ノルム空間.

19.4. 次の性質は同値であることを証明せよ.

(a) E は可ノルムである.

(b) E の強双対 E'_b は可ノルムである.

(c) E'_b は距離付け可能である.

19.5. $\mathfrak{S}$ を E の有界集合からなる被覆であって，条件 $(\mathfrak{S}_1)$, $(\mathfrak{S}_2)$ をみたすものとする．このとき，次の事実の同値性を証明せよ.

(a) 双線形形式 $(x, x') \mapsto \langle x', x \rangle$ は $E \times E'_{\mathfrak{S}}$ 上で連続である.

(b) E は可ノルムであり，E' 上の $\mathfrak{S}$–位相は強双対位相に一致する.

(ヒント：命題14.4と35.3を利用せよ.)

19.6. E を LF–空間であって，有限次元 (Hausdorff) TVS からなる定義列 $\{E_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ をもつものとする．このとき，次のことを証明せよ.

(i) E の双対 E' は E の代数的双対 E^* に等しい.

(ii) E' 上で弱位相と強位相は一致する.

(iii) E の弱 (強) 双対 E' は Fréchet 空間である.

(iv) E から E'_b の双対への標準写像は上への写像である.

19.7. E を LF–空間とし，$\{E_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ をその定義列とする．このとき，次の性質は同値である事を示せ.

(a) E の 強双対 E'_b は Fréchet 空間である.

(b) すべての E_k は可ノルムである.

19.8. E をノルム空間とし，E' をその双対とする．E' の原点が，位相 $\sigma(E', E)$ に関して，その単位球面 $\{x' \in E' ; \|x'\| = 1\}$ ($\| \ \|$: E' における双対ノルム) の閉包に属するための必要十分条件は，$\dim E$ が無限であることである．これを証明せよ．また，このことから，$\dim E$ が無限のときには，弱双対位相 $\sigma(E', E)$ は強双対位相 $b(E', E)$ よりも真に粗いことを導け.

20.

双対空間の例, L^p 空間

この章においては，第I部で導入した幾つかの空間の双対空間が，どのようにして具体的に実現されるかを説明する．この具体的実現という意味を正確に述べて見よう．Eを関数のなす位相ベクトル空間とし，E'をその双対とする．いま，ベクトル空間F(位相は入ってなくてよい)とFからE'への線形写像の対(F, j)があったとし，さらにjは一対一で上への写像であると仮定する．このとき，(F, j)，あるいは単にF，はEの双対の一つの実現であるといってよい．しかし実際には，もう少し強い要請がある．明確に述べるのは難しいが，ある意味で“自然な”実現だけを容認するのである．すなわち，解析学の一般的関連から見て，興味のある実現を選ぶのである．Eが関数空間のときには，E'の実現Fもまた関数空間であることが望ましい．しかし，明らかにこのことは常に可能とは限らない．たとえば，$\mathbf{R}^n$の開集合Ω上の連続関数全体の空間$\mathcal{C}^0(\Omega)$の双対は，関数空間として自然な仕方では実現できない．このような嫌に思える事態は，対象物の範囲を関数から測度へ，測度から超関数や解析的汎関数へと拡大してゆくことにつながるのである．また次のことにも注意しておこう．双対空間E'の実現としては，代数的であるだけでなく位相的な実現を求めることも考えられる．すなわち，対(F, j)において，FをTVSとし，jをFからE'の上への位相ベクトル空間の構造に関する同形写像とするのである(これはE'の位相が問題になる；通例は強双対位相を考える；243頁参照)．関数のなすノルム空間やHilbert空間を扱うときには，E'は双対Banach空間あるいはHilbert空間の構造をもつ(命題11.2，定理11.5の系，定理12.2

参照)．したがって，このときには，Fを Banach 空間あるいは Hilbert 空間であって，jはFからE'の上への等距離写像であると要請することもできる．実際これが標準的なやり方であり，これからその最も重要な例について述べてゆこう．

Banach 空間の場合を中心にして述べよう．E, Fを二つの Banach 空間とする．Eの双対E'に双対 Banach 空間の構造を入れたものからFの上への等距離写像の存在を証明しようということになる．このためには，都合のよい幾つかの性質[1]をもつ$E\times F$上の双線形形式があればよい．その双線形形式を$\langle\ ,\ \rangle$で示すことにしよう．EおよびF上のノルムをそれぞれ$\|\ \|_E$, $\|\ \|_F$で示す．双線形形式$\langle\ ,\ \rangle$がみたすべき第一の条件は連続性の強い形[†]である．すなわち

(*) すべての$e\in E$, $f\in F$について，$|\langle e,f\rangle|\leqslant\|e\|_E\|f\|_F$.

もし (*) が成り立つならば，次のことがわかる．

(1) 任意に固定した$f\in F$に対して

$$e\mapsto\langle e,f\rangle$$

はE上の連続線形形式である．これをL_fで示す．

(2) さらに

$$\|L_f\|_{E'}=\sup_{\|e\|_E=1}|\langle e,f\rangle|\leqslant\|f\|_F,\quad (\|\ \|_{E'}: E' \text{ のノルム})$$

これは，写像$f\mapsto L_f$が (線形であることは明らかだが) 連続であり，さらに**縮小写像** (contraction) であること，すなわち，ノルムが$\leqslant 1$であることを示している． ◉

双線形形式$\langle\ ,\ \rangle$のみたすべき第二の条件は，次のものである．

(**) 任意の$f\in F$と任意の$\varepsilon>0$に対して，$e\in E$が存在して

$$\|e\|_E\leqslant 1,\qquad |\langle e,f\rangle|\geqslant\|f\|_F-\varepsilon$$

となる．

---

1) 以下に順次説明がある．

†) 単なる連続性は，評価式$|\langle e,f\rangle|\leqslant$ (定数)$\times\|e\|_E\cdot\|f\|_F$で表現される．

性質 (**) から，写像 $f \mapsto L_f$ が F から E' への等距離写像になることがわかる．実際

$$\|f\|_F - \varepsilon \leqslant |L_f(e)| \leqslant \|L_f\|_{E'}.$$

これから，$\|f\|_F = \|L_f\|_{E'}$ を得る．なぜなら，$\varepsilon > 0$ は任意であり，既知のように，$\|f\|_F \geqslant \|L_f\|_{E'}$ だからである．

最後は，等距離写像 $f \mapsto L_f$ が上への写像であることを示すことである．これは，それぞれの場合に応じた特別の工夫によって証明される．E 上の任意の連続線形汎関数 L に対して，F の元 f であって，すべての $e \in E$ について $\langle e, f \rangle = L(e)$ となるものを構成する (あるいは存在を証明する) のである．幾つかの場合には (たとえば $l^p, 1 \leqslant p < +\infty$；後述参照)，これは容易であって，何等の深い結果を必要としない．しかし，そうでない場合には (たとえば，空間 $L^p, 1 \leqslant p < +\infty$；後述参照)，やや深い結果を利用することが必要になる (たとえば，L^p の場合には，Lebesgue-Nicodym の定理)．いずれにしても，この章における証明は，すべて上に述べた三つの段階を通って行なわれるのである．第一段階は一つの評価式の証明である．この評価式は性質 (*) であり，これから双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ の連続性が出る．この章で述べる例においては，この評価式は有名な **Hölder の不等式** (Hölder inequalities) から出る．まず Hölder の不等式を述べて証明しよう．

一つの集合 X の上で定義された関数の全体からなるベクトル空間を $\mathscr{F}(X, \mathbf{C})$ で表わし，$\mathscr{F}(X, \mathbf{C})$ 上の一つのセミノルム $\mathfrak{p}$ を考える．以下に述べることの便宜上，$\mathfrak{p}$ は $\mathscr{F}(X, \mathbf{C})$ の元によっては，$+\infty$ という値も取り得るとしておく．さらに，$\mathfrak{p}$ は**単調増大** (increasing) であると仮定する．すなわち，

(20.1) f, g を X 上の二つの実数値関数であって，

$$f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0 \quad (\text{すべての } x \in X \text{ について})$$

となっているならば，

$$\mathfrak{p}(f) \geqslant \mathfrak{p}(g).$$

さて，これから述べて証明する Hölder の不等式は，非常に広い応用範囲を持っている．しかし，われわれの限られた目的のためには，セミノルム $\mathfrak{p}$ と

しては，次の二つの例だけを考えることにする．

例 1. X を非負整数 $j=0,1,2,\ldots$ の集合とし，$\mathscr{F}(X,\mathbf{C})$ を複素数列 $\sigma=(\sigma_j)$ のすべてからなるベクトル空間と同一視する．この場合には，セミノルム $\mathfrak{p}$ として

$$\sigma=(\sigma_j)\mapsto|\sigma|_{l^1}=\sum_{j=0}^{\infty}|\sigma_j|$$

を考える．$\mathfrak{p}$ が有限になる集合は，もちろん l^1 である．

例 2. X を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$\mathfrak{p}$ を

$$f\mapsto\int_X^*|f(x)|dx$$

とする．ここで $\int^*$ は **Lebesgue の上積分** (upper Lebesgue integral) を表わす．X 上の関数 f であって，$\mathfrak{p}(f)<+\infty$ となるような f の全体は，Lebesgue 可積分関数の集合とは一致しないことに注意しよう．Lebesgue 可積分関数の全体はもっと狭いものである．すなわち，それは $\mathfrak{p}(f)<+\infty$ であって，さらに可測なもの，換言すれば，コンパクトな台をもつ連続関数の，セミノルム $\mathfrak{p}$ の意味での極限になっているものの全体である．もし f が可積分，すなわち $f\in\mathscr{L}^1$ ならば，上端の $*$ 印を省いて $\int|f(x)|dx$ と書く．このときには，$\mathrm{Re}\,f$ も $\mathrm{Im}\,f$ も可積分となる．さらに f が実数値可積分のときには，$f^+=\sup(f,0)$, $f^-=\sup(-f,0)$ もまた可積分となり，f の Lebesgue 積分は

$$\int f\,dx=\int(\mathrm{Re}f)^+\,dx-\int(\mathrm{Re}f)^-\,dx+i\int(\mathrm{Im}\,f)^+-i\int(\mathrm{Im}\,f)^-\,dx$$

によって定義される．

よく知られているように，例 1 および例 2 は，もっと一般な理論，測度論の特別の場合にすぎない．もちろん，以下に述べる証明の大部分は，[抽象的] 集合 X 上の正測度 dx に関する上積分を $\int_X^*$ で表したとして，セミノルム $\int_X^*|f(x)|dx$ を考えた場合にも通用するように一般化できるのである．測度論に慣れている読者は，この章で述べる諸結果の一般化についても慣れているであろう．詳細には立入らないことにしておく．

さて，Hölder の不等式を述べる．

補題 20.1. X を一つの集合，$\mathscr{F}(X, \mathbf{C})$ を X 上の複素数値関数全体の空間とし，$\mathfrak{p}$ を $\mathscr{F}(X, \mathbf{C})$ 上の単調増大なセミノルムとする（すなわち，性質 (20.1) をもつとする）．このとき，X 上の任意の非負関数 f, g と実数 $\alpha, \beta > 0$, $\alpha+\beta=1$ に対して，不等式

$$\mathfrak{p}(f^\alpha g^\beta) \leqslant [\mathfrak{p}(f)]^\alpha [\mathfrak{p}(g)]^\beta \tag{20.2}$$

が成り立つ．

補題 20.1 の証明　二変数 (s, t) の平面において，閉凸集合

$$\Gamma = \{(s, t)\,;\ s^\alpha t^\beta \geqslant 1,\ \ s>0,\ \ t>0\}$$

を考える[1]．集合 Γ は，その境界となる曲線

$$\partial\Gamma = \{(s, t)\,;\ s^\alpha t^\beta = 1,\ \ s>0,\ \ t>0\}$$

に対する接線を境界にもち Γ を含むような閉半平面全体の共通部分になる[2]．そのような半平面は，不等式

$$as+bt \geqslant c\,;\ a,\ b,\ c \ \ \text{は定数}\ \ >0$$

によって定義される．

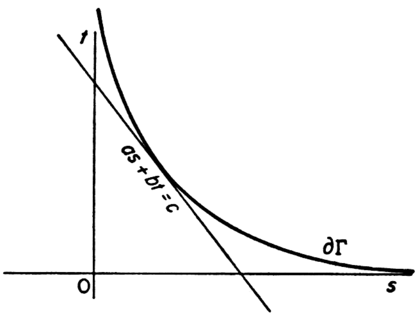


図 4

いま，x を X の点であって

1) これが凸であることの証明は読者に委せる．

2) 証明は読者に委せる．Hahn-Banach の定理と考えてよい．

$$M(x)=[f(x)]^\alpha[g(x)]^\beta \neq 0$$

なるものとする． $s_0=f(x)/M(x)$， $t_0=g(x)/M(x)$ とおくと， $s_0{}^\alpha t_0{}^\beta=1$ となる． これは， $\alpha+\beta=1$ から $M(x)^{\alpha+\beta}=M(x)$ となるからである． このことから，上述の定数 a, b, c に対して

$$c \leqslant as_0+bt_0$$

となり，これは

$$cM(x) \leqslant af(x)+bg(x)$$

を意味する．この両辺に $\mathfrak{p}$ を施せば

$$c\mathfrak{p}(M) \leqslant a\mathfrak{p}(f)+b\mathfrak{p}(g)$$

を得る．そこで $\mathfrak{p}(M) \neq 0$ と仮定すると

$$c \leqslant a\mathfrak{p}(f)/\mathfrak{p}(M)+b\mathfrak{p}(g)/\mathfrak{p}(M).$$

これが, 直線 $\{(s,t)\,;\, as+bt=c\}$ が $\partial\Gamma$ に接するような任意の (a, b, c) について成り立つのだから， 座標が $s=\mathfrak{p}(f)/\mathfrak{p}(M)$， $t=\mathfrak{p}(g)/\mathfrak{p}(M)$ であるような点は Γ に属することになる．これは $s^\alpha t^\beta \geqslant 1$ となること，すなわち

$$\mathfrak{p}(M) \leqslant [\mathfrak{p}(f)]^\alpha[\mathfrak{p}(g)]^\beta$$

となることを意味する． この不等式は， $\mathfrak{p}(M)=0$ のときも明らかに成り立つから，$M(x)$ の定義を思い出せば，(20.2) が得られたことになる．

例 I.
数列空間 $l^p(1 \leqslant p < +\infty)$ の双対

l^p は，複素数列 $\sigma=(\sigma_j)$　$(j=0,1,\ldots)$ であって，

$$\|\sigma_{l^p}\|=\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\sigma_j|^p\right)^{1/p} < +\infty$$

となるもの全体のなる空間であった. ノルム $\sigma \mapsto \|\sigma\|_{l^p}$ によって，l^p は Banach 空間であり，l^2 は Hilbert 空間である (11 章，例 IV 参照).

l^p 空間に関する双対性の定理は次のように述べることができる：まず，l_F によって，有限数列すなわち， 数列 $\sigma=(\sigma_j)$ $(j=0,1,\ldots)$ であって，j が十分大

きければ常に $\sigma_j=0$ となるものの全体を表わすことにしよう．明らかに，l_F はすべての l^p に含まれる．さらに，容易に検証できるように，l_F は l^p で稠密である（p が有限であることを用いる；検証は読者に委せる）．

定理 20.1. $l_F\times l_F$ 上の双線形形式

$$\langle\sigma,\tau\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j\tau_j,\quad \sigma=(\sigma_j),\quad \tau=(\tau_j)$$

は，積空間 $l^p\times l^{p'}$ の上へ拡張することができる．ここで，$1\leqslant p<+\infty$ とし，p' は

$$p'=p/(p-1)\quad (p>1 \text{ のとき})$$
$$p'=+\infty\qquad (p=1 \text{ のとき})$$

とする．この拡張は Hölder の不等式

(20.3) $$|\langle\sigma,\tau\rangle|\leqslant\|\sigma\|_{l^p}\|\tau\|_{l^{p'}}$$

をみたす．これから，写像

$$\tau\mapsto(\sigma\mapsto\langle\sigma,\tau\rangle)$$

が $l^{p'}$ から l^p の双対への連続線形写像であることが出る．実際には，これは $l^{p'}$ から l^p の双対の上への等距離写像である．

$p=1$ のときには，$l^{p'}$ は l^∞ となる．l^∞ は有界数列全体のなす Banach 空間であって，そのノルムは

$$\|\sigma\|_{l^\infty}=\sup_{0<j<+\infty}|\sigma_j|$$

であったことを思い出そう．

定理の証明 まず $p>1$ のときから始める．このとき $p'<+\infty$ となり，(20.3) は一般の Hölder 不等式（補題 20.1）から明らかである．これから，写像

(20.4) $$\tau\mapsto(\sigma\mapsto\langle\sigma,\tau\rangle)$$

は $l^{p'}$ から l^p の双対への連続線形写像となり，そのノルムは $\leqslant 1$ である．なぜならば，(20.3) から

$$\sup_{\|\sigma\|_{l^p}=1} |\langle \sigma, \tau \rangle| \leqslant \|\tau\|_{l^{p'}}$$

となるからである．さて，この写像が等距離写像であることを示そう．$\tau \in l^{p'}$ を任意にとる複素数列 σ を，次式で定義する：

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \bar{\tau}_j |\tau_j|^{p'-2} && (\tau_j \neq 0 \text{ のとき}), \\ &= 0 && (\tau_j = 0 \text{ のとき}). \end{aligned}$$

すると，次の関係が成り立つ．

(20.5) $$|\sigma_j|^p = |\tau_j|^{pp'-p} = |\tau_j|^{p'}.$$

これからただちに $\sigma = (\sigma_j) \in l^p$ となり，さらに

$$\langle \sigma, \tau \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} |\tau_j|^{p'} = \|\tau\|_{l^{p'}}^{p'}$$

を得る．ところが，他方

$$\langle \sigma, \tau \rangle \leqslant \|\sigma\|_{l^p} \|\tau\|_{(l^p)'},$$

ただし，$\| \quad \|_{(l^p)'}$ は l^p の双対空間上の双対ノルムである．ここで (20.5) を用いると

$$\|\sigma\|_{l^p} = \|\tau\|_{l^{p'}}^{p'/p}$$

だから，結局

$$\|\tau\|_{l^{p'}}^{p'} \leqslant \|\tau\|_{l^{p'}}^{p'/p} \|\tau\|_{(l^p)'}.$$

ところが，$p' - p'/p = 1$ だから，等距離写像であることが証明された．

残るところは，写像 (20.4) が上への写像である事である．そこで，f を l^p 上の任意の連続線形汎関数とする．これに対して，$\tau \in l^{p'}$ を

$$f(\sigma) = \langle \sigma, \tau \rangle, \qquad \forall\, \sigma \in l^p$$

となるように構成できることを述べよう．いま $\sigma^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ によって，複素数列 (σ_k)，ただし $\sigma_k = 0$ $(k \neq j)$ $\sigma_j = 1$ なるものを表わすことにする．明らかに，これらは l^p に属する．そこで

$$\tau_j = f(\sigma^{(j)})$$

とおく．σ を一つの有限数列とすれば，$\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \sigma^{(j)}$ と書けるから，

$$f(\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \tau_j$$

となる．いま M を任意の (大きい) 整数として

$$\sigma_j = \bar{\tau}_j|\tau|^{p'-2}, \quad (\tau_j \neq 0,\ j \leqslant M \text{ のとき}),$$
$$= 0 \qquad\qquad (\text{そうでないとき}).$$

とおく．また，$\tau^{(M)}$ をその j 番目の項が τ_j ($j \leqslant M$ のとき)，0 ($j > M$ のとき) であるような数列とする．そうすれば，

$$f(\sigma) = \|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}}^{p'}, \quad \|\sigma\|_{l^p} = \|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}}^{p'/p}$$

と書ける．さて，f が連続であることを用いよう．すなわち，定数 $A > 0$ が存在して，すべての $s \in l^p$ について

$$|f(s)| \leqslant A\|s\|_{l^p}$$

が成り立つから，

$$\|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}}^{p'} = |f(\sigma)| \leqslant A\|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}}^{p/p'}.$$

したがって

$$\|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}}^{p'-p'/p} \leqslant A.$$

ところで $p'-p'/p = 1$ だから $\|\tau^{(M)}\|_{l^{p'}} \leqslant A$. この評価式はすべての M について成り立つから，これは $\tau \in l^{p'}$ を示している．$f(\sigma) = \langle\sigma, \tau\rangle$ がすべての $\sigma \in l^p$ について成り立つことは，まず σ が有限ならよいことと，すでに述べたように，l_F が l^p $(p < +\infty)$ で稠密であることから出る．

さて今度は $p = 1$ の場合を考えよう．このときには $p' = +\infty$ であった．この場合 Hölder の不等式 (20.3) は自明である．実際それは

$$|\langle\sigma, \tau\rangle| \leqslant \{\sup_{j=0,1,\cdots}|\tau_j|\}\|\sigma\|_{l^1} \tag{20.6}$$

となり，σ が有限なら明らかであり，l_F が l^1 で稠密なことに注意すればよい．このことから，(20.4) はやはり $l^{p'}$ から l^p への連続線形写像であって，そのノルムが $\leqslant 1$ となることがわかる．さて，$\sigma^{(j)}$ を上記の通りとすれば，

$$|\tau_j| = |\langle\sigma^{(j)}, \tau\rangle| \leqslant \|\tau\|_{(l^1)'}.$$

これからただちに

$$\|\tau\|_{l^\infty} \leqslant \|\tau\|_{(l^1)'}$$

を得て，(20.6) と合せると，二つのノルムの等しいことがわかる．すなわち，

(20.4) は l^∞ から $(l^1)'$ への等距離写像である．残るところは，それが上への等距離写像であることを示すことである．

f を l^1 上の任意の連続線形汎関数としよう．f に対して前と同様に，数列 τ を $\tau_j = f(\sigma^{(j)})$ とおいて対応させよう．τ が有界であることを示さねばならない．これは不等式

$$|\tau_j| = |f(\sigma^{(j)})| \leqslant A\|\sigma^{(j)}\|_{l^1} = A$$

から従う．そうすれば，$p>1$ の場合と同様の議論から，$f(\sigma) = \langle\sigma, \tau\rangle$ がすべての $\sigma \in l^1$ に対して成り立つ．

例 II.

空間 $L^p(\Omega)(1 \leqslant p < +\infty)$ の双対

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，dx を $\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度とする．われわれの目的は，p: 有限 $\geqslant 1$ のときに $L^p(\Omega)$ の強双対の有用な実現をあたえようというのである．まず例 I で述べたようなやり方をまねて見よう．類似性は明かである．$L^p(\Omega)$ のノルムは

$$f \mapsto \|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

このノルムに関して $L^p(\Omega)$ は Banach 空間であり，$L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間である (11 章，例 V)．有限数列の空間 l_F の役割を果たすものは Ω 上の連続関数であって台が Ω のコンパクト集合になるもの全体の空間 $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ である．このベクトル空間は，$p < +\infty$ なる任意の $L^p(\Omega)$ において稠密である (定理 11.3)．さて，$\mathcal{C}_c^0(\Omega) \times \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上の双線形形式

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\, dx$$

を考える．これは，$1 < p < \infty$，$1 < p' < \infty$，$1/p + 1/p' = 1$ なるとき，$L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$ 上の双線形形式に拡張できて，その拡張は Hölder の不等式

(20.7) $$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$$

をみたす．実際これは補題 20.1 からただちに従う．これは写像

(20.8) $$f \mapsto (g \mapsto \langle f, g \rangle)$$

が $L^{p'}(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ の双対への連続線形写像であって，そのノルムが $\leqslant 1$ であることを示している．次はこの写像が等距離的であることを示すことである．このために，Ω 上の関数 g を次のように定義する．

$$g(x) = \overline{f(x)}\,|f(x)|^{p'-2}, \qquad (f(x) \neq 0 \text{ のとき}),$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad , \qquad (\text{その他のとき}).$$

そうすると，明らかに

(20.9) $$\|g\|_{L^p} = \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

(20.10) $$\langle f, g \rangle = \|f\|_{L^{p'}}^{p'}$$

を得る．ところで，Banach 空間の双対上のノルムの定義から

$$|\langle f, g \rangle| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{(L^p)'}$$

となる．これと (20.9), (20.10) を組み合わせれば

$$\|f\|_{L^{p'}}^{p'-p'/p} \leqslant \|f\|_{(L^p)'}.$$

$p'-p'/p = 1$ だから，これは (20.8) が等距離的であることを示す．

さて，残るところは，(20.8) が上への写像になることである．これは普通 Lebesgue-Nicodym の定理を用いて証明される．まずこの定理を思い出そう．次章のことを少々先取りすることになるが，開集合 Ω 上の **Radon 測度**の概念を導入する．Ω 上 Radon 測度 μ とは，空間 $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に自然な LF 構造 (13 章，例 II) を入れたものの上の連続線形汎関数のことである．Radon 測度 μ が**正** (positive) であるとは，いたるところ非負であるような任意の関数 $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に対して

$$\langle \mu, \varphi \rangle \geqslant 0$$

であることをいう．正 Radon 測度の一例は Lebesgue 測度

$$\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x)\,dx$$

である．

さて，Ω 上の任意の複素 Radon 測度 μ は次のように分解できること (証明は

267–270 頁) を用いる．

$$\mu=\rho^+-\rho^-+i(\sigma^+-\sigma^-).$$

ただし，ρ^+，ρ^-，σ^+，σ^- は正 Radon 測度である (ここでもちろん，$\rho^+-\rho^-$ は μ の実部；$\sigma^+-\sigma^-$ は μ 虚部とよばれる)．さて，Radon–Nicodym の定理の特別の場合として，次に述べる結果を利用する．

定理 20.2. μ を Ω 上の Radon 測度としたとき，次の二つの条件は同値である．

(a) Ω 上で非負連続でコンパクトな台をもつ任意の関数 g と任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，次のことが成り立つ：$h\in\mathcal{C}_c{}^0(\Omega)$ がすべての x について $0\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ とするならば，

$$\int h(x)\,dx\leqslant\delta \quad \text{なるとき} \quad \langle\mu,h\rangle\leqslant\varepsilon \quad \text{となる．}$$

(b) Ω 上ほとんど到るところ非負な局所 Lebesgue 可積分関数 f が存在して，すべての $\varphi\in\mathcal{C}_c{}^0(\Omega)$ に対して

$$\langle\mu,\varphi\rangle=\int\varphi(x)f(x)\,dx$$

が成り立つ．

f が**局所可積分** (locally integrable) とは，f が可測であって，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して

$$\int_K f(x)\,dx<+\infty$$

となることを意味する．ここで f が非負であったことに注意しよう (そうでなければ，K 上の積分において f を $|f|$ で置き換えて考える)．

さて，$L^p(\Omega)$ 上の一つの連続線形汎関数 λ を考える．したがって，定数 $C>0$ が存在して，すべての $u\in L^p(\Omega)$ について

$$|\lambda(u)|\leqslant C\|u\|_{L^p} \tag{20.11}$$

が成り立つ．そこで K を Ω のコンパクト集合とし，$u\in\mathcal{C}_c{}^0(\Omega)$ をその台が K

に含まれるものとすれば，

$$\|u\|_{L^p}^p \leqslant \mathrm{meas}(K)(\sup_x |u(x)|)^p.$$

したがって，

$$|\lambda(u)| \leqslant C(\mathrm{meas}(K))^{1/p} \sup_x |u(x)|$$

を得る．ここで，meas(K) は集合 K の Lebesgue 測度を表すものとする．この式から，u の台が［一定の］K に含まれながら u が一様に 0 に収束するならば，$\lambda(u)\to 0$ となることがわかる．これは，λ を Banach 空間 $\mathcal{C}_c^0(K)$ に制限したものが連続であることを示している (13章，例 II 参照)．これはまた，線形形式 $u\mapsto\lambda(u)$ が $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上で連続であることを意味する (命題 13.1 の系)．すなわち，この線形形式は Ω 上の一つの Radon 測度を定義する．この Radon 測度もまた λ で示すことにしよう．まず λ が正の場合を考えよう．g を Ω 上の台がコンパクトな任意の非負連続関数とし，$h\in\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ を $0\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ がすべての x について成り立つ任意の関数とすると，

$$\|h\|_{L^p} < (\sup_x |g(x)|^{1-1/p})\left(\int h(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

そこで，$M=\sup_x |g(x)|^{1-1/p}$，$\delta=(\varepsilon/CM)^p$ とおけば，(20.11) から

$$\int h(x)\,dx \leqslant \delta \quad \text{ならば} \quad \lambda(h)\leqslant\varepsilon$$

が成り立つ．したがって［定理 20.2 により］，Ω 上の局所可積分関数 f で，ほとんど到るところ $f\geqslant 0$ となり，かつ

$$\lambda(\varphi)=\int \varphi(x)f(x)\,dx, \qquad \forall\ \varphi\in\mathcal{C}_c^0(\Omega)$$

をみたすものが存在する．そこで，いま $\Omega_1\subseteq\Omega_2\subseteq\cdots\subseteq\Omega_k\subseteq\cdots$ を相対コンパクトな開集合の列で，その合併が Ω になるものを一つ考える．各 $k=1,2,\ldots$ に対して，関数 f_k を

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in\Omega_k \text{ かつ } f(x)\leqslant k \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば，f_k は Ω 上の関数として明らかに有界可測であり，その台はコン

パクトになる (Ω_k の閉包に含まれるから). このような関数は，すべての $q \geqslant 1$ について $L^q(\Omega)$ に属することは明らかである. さて，$f_k \leqslant f$ より，

$$\int \varphi(x) f_k(x)\, dx \leqslant \int \varphi(x) f(x)\, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{C}_c{}^0(\Omega), \ \varphi \geqslant 0 \tag{20.12}$$

が成り立つ. 上に述べたように $f_k \in L^{p'}(\Omega)$ だから，この証明の始めの部分に述べたことから $u \mapsto \int u(x) f_k(x)\, dx$ は $L^p(\Omega)$ 上の連続線形形式になる. この線形形式のノルムが k に無関係な定数によって上から押え得ることを示そう.

$\varphi \in \mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ を任意にとる (もちろん，必ずしも $\geqslant 0$ とは限らない). これに (20.11) と (20.12) を適用すれば，

$$\left|\int \varphi(x) f_k(x)\, dx\right| \leqslant \int |\varphi(x)| f_k(x)\, dx \leqslant \int |\varphi(x)| f(x)\, dx \leqslant C \|\varphi\|_{L^p}$$

となるから，$\mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ が $L^p(\Omega)$ で稠密なことを用いれば，すべての $u \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\left|\int u(x) f_k(x)\, dx\right| \leqslant C \|u\|_{L^p} \tag{20.13}$$

を得る. そこで，$u(x)$ として

$$u(x) = \begin{cases} [f_k(x)]^{p'-1} & (f_k(x) \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

と取れば，

$$\int u(x) f_k(x)\, dx = \|f_k\|_{L^{p'}}^{p'}, \qquad \|u\|_{L^p} = \|f_k\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

となるから，(20.13) より

$$\|f_k\|_{L^{p'}} \leqslant C$$

すなわち，

$$\int [f_k(x)]^{p'}\, dx \leqslant C^{p'}$$

を得る. ところで，$(f)^{p'}$ は非負な可積分関数の非減少列 $(f_k)^{p'}$，$k = 1, 2, \ldots$ の各点収束の極限だから，

$$\int [f(x)]^{p'}\, dx = \lim_{k \to \infty} \int [f_k(x)]^{p'}\, dx \leqslant C^{p'}$$

となる．かくして $f \in L^{p'}$ を得る．$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ が $L^p(\Omega)$ において稠密なことから，直ちに

$$\lambda(u) = \langle u, f \rangle = \int u(x) f(x)\, dx, \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega).$$

これは，Radon 測度

$$\mathcal{C}_c^0(\Omega) \ni \varphi \mapsto \lambda(\varphi)$$

が正である場合に証明できたのである．Radon 測度が一般の場合には，それを実部と虚部とに分解し，またその各々を正の部分と負の部分に分解する（これは始めに述べた）．このようにすれば，任意の Radon 測度 λ は 4 つの正 Radon 測度の一次結合（係数は $\pm 1, \pm i$）に分解される．そして，その各々の正 Radon 測度が (20.11) の形の評価式を持つことになる[1]．いままでの議論を，この各々の正 Radon 測度に適用することによって，

$$\lambda(u) = \langle u, f \rangle, \qquad \forall\, u \in L^p(\Omega)$$

となるような複素数値関数 $f \in L^{p'}(\Omega)$ の存在を結論することができる．

$p=1$ の場合も同様の仕方で論じることができる．それは読者の演習としよう．全体をまとめれば，

定理 20.3. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．p を実数で $1 \leqslant p < +\infty$ とする．$p>1$ ならば $p' = p/(p-1)$ とし，$p=1$ ならば $p' = +\infty$ とおく．このとき，$\mathcal{C}_c^0(\Omega) \times \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上の双線形形式

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \int u(x) v(x)\, dx$$

は $L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$ 上の双線形形式に拡張することができて，この拡張は Hölder の不等式

$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}$$

をみたす．さらに，写像

$$v \mapsto (u \mapsto \langle u, v \rangle)$$

1) もちろんこのことは証明を要する．次章参照．

は $L^{p'}(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ の強双対の上への等距離写像になる．

演 習 問 題

20.1. $p \leqslant q$ ならば $l^p \subseteq l^q$ となり，その単射 $l^p \to l^q$ は連続であって，ノルムが 1 に等しいことを，Hölder の不等式を用いて示せ．さらに，$p < q$ ならば $l^p \neq l^q$ であり，l^p の位相は l^q からの誘導位相よりも真に細かいことを証明せよ．

20.2. 定理 20.1 に述べた結果の $p = 2$ の場合と，Hilbert 空間からその反双対の上への標準的線形等距離写像 (定理 12.2 参照) との関連を述べよ．

20.3. 0 に収束する複素数列全体のなす空間 l_∞ の上で，l^∞ のノルム

$$\sigma = (\sigma_k)_{k=0,1,\cdots} \mapsto |\sigma|_{l^\infty} = \sup_k |\sigma_k|$$

を考える[1]．このとき，l_∞ は Banach 空間となり，写像

$$l^1 \ni \tau = (\tau_k) \mapsto \left(\sigma = (\sigma_k) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \tau_k\right) \tag{20.14}$$

は l^1 から l_∞ の双対 (双対 Banach 空間構造をもつ) の上への等距離写像になることを証明せよ．また，このことから，写像 (20.14) は l^1 から l^∞ の双対の上への写像にはならないことを導け．

20.4. l^∞ 上の恒等的には 0 にならない連続線形形式であって，l_∞ の上で 0 になるものの例を挙げよ (前問参照)．[2]

1) 記号 l^∞ と l_∞ を混合しないように注意せよ．
2) そのようなものの存在を示すこと．具体例ではない．

21.

Radon 測度，超関数

前章では，幾つかの関数空間の双対性を証明した．すでに述べたように，関数空間の双対空間が常に関数空間として“自然な仕方で”解釈できるとは限らない．この事情は，しかしながら，それがわれわれの知識財産に新しい物を付け加える可能性をもたらすという意味で，むしろ幸いなのである．関数空間の双対が常に関数空間であったならば，常にそれを直接考察すればよいのであって，何等の新しい物もなくなってしまうであろう．この章では，コンパクトな台をもつ連続関数の空間 $\mathcal{C}_c^0$ の双対と，テスト関数（すなわち，コンパクトな台をもつ無限回可微分関数）の空間の双対を導入する． 前者の各元はすでに名称があたえられている (258頁). すなわち，それらは **Radon 測度** (Radon measure) である．

$\mathcal{C}_c^\infty$ の双対の各元は**超関数** (distribution) であって， 本書の相当な部分はそのために当てられている．Radon 測度と超関数とは，自然な仕方では関数として解釈できないもののよい例である．解釈の有無とは関係なく，いずれにしても，そのもの自体として考察する方がよい．次章では，“新しい” 対象物の第三の例：**解析的汎関数** (analytic functional) を導入する． これは， 正則関数の空間の双対空間の元である．

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の Radon 測度

Ω 上の複素数値連続関数であって，Ω のあるコンパクト集合の外部で 0 になるもの全体の空間を $\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ とする．Ω 上の Radon 測度 μ とは，$\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ 上の線形汎関数であって，$\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ に $\mathscr{C}_c^0(K)$ の帰納的極限位相を入れたときに連続になるものをいう．ここで K は Ω の任意のコンパクト集合であり，$\mathscr{C}_c^0(K)$ は Ω 上の連続関数であって K の外では 0 になるもの全体のなす空間である．その位相は最大値ノルム

$$f \mapsto \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

によって定義されるものを考える．

注意すべきことは，$\mathscr{C}_c^0(K)$ は，“Ω 上で定義された複素数値関数であって，その台が K に含まれ，K 上で連続なもの全体の空間”（これを $\mathscr{C}^0(K)$ で表わす）とは異なるということである．たとえば，K 上の 0 とは異なる定数関数を K の外では 0 に等しいとして拡張したものは $\mathscr{C}_c^0(K)$ の元ではない．なぜなら，それは Ω 上で連続にはならないからである．

いずれにしても，Ω 上の Radon 測度とは $\mathscr{C}_c^0(K)$ 上の線形汎関数 μ であって，Ω の各コンパクト集合 K に対して定数 $C(\mu, K) > 0$ が存在して，K の外では恒等的に 0 となるようなすべての連続関数 φ に対して，常に

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leqslant C(\mu, K) \sup_x |\varphi(x)|$$

となるもののことである．

Radon 測度の例：一点 x^0 における **Dirac 測度**

$$\varphi \mapsto \varphi(x^0);$$

Lebesgue 測度 $\varphi \mapsto \int \varphi(x)\,dx$（これは連続関数に対しては Riemann 積分と一致している）；**密度** (density) $g(x)\,dx$

$$\varphi \mapsto \int \varphi(x) g(x)\,dx$$

ここで g は Ω 上の局所可積分な関数である．これは g が可測関数であって，Ω の各コンパクト集合 K 上で

$$\int_K |g(x)|dx < +\infty$$

となることを意味する．

Radon 測度 μ が**実** (real) であるとは，すべての実数値関数 $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に対して $\langle \mu, f \rangle$ が実数になることをいう．μ が**正** (positive) であるとは，すべての非負関数 $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に対して $\langle \mu, f \rangle \geqslant 0$ となることをいう．開集合 Ω 上の Radon 正測度の例としては，Lebesgue 測度 dx あるいはもっと一般に密度 $g(x)dx$，ただし g は Ω 上の局所可積分関数であってほとんど到るところ正になるものとする．Ω の点 x^0 における Dirac 測度 δ_{x^0} もまた Radon 正測度である．

任意の Radon 測度 μ に対し，その複素共役 $\bar{\mu}$ を次の式で定義する．

$$\langle \bar{\mu}, \varphi \rangle = \overline{\langle \mu, \bar{\varphi} \rangle}$$

これから，実部および虚部を

$$\mathrm{Re}\,\mu = \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu}), \qquad \mathrm{Im}\,\mu = \frac{1}{2i}(\mu - \bar{\mu}), \qquad i = (-1)^{1/2}$$

により定義する．

例．μ を Lebesgue 測度に関する密度 $\mu = g(x)dx$ としたとき，

$$\bar{\mu} = \overline{g(x)}\,dx, \qquad \mathrm{Re}\,\mu = (\mathrm{Re}\,g)(x)\,dx, \qquad \mathrm{Im}\,\mu = (\mathrm{Im}\,g)(x)\,dx.$$

もちろん，$\mu = \mathrm{Re}\,\mu + i\mathrm{Im}\,\mu$ が成り立つ．

次に，任意の実 Radon 測度は二つの正 Radon 測度の差として書けること [分解定理] を示そう．そのためにも，まず次の結果を証明しよう．

定理 21.1. $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上の正線形汎関数はすべて正 Radon 測度である．

証明すべきことは，$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上の線形汎関数 L が正であれば，それは必然的に連続 ($\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 上の帰納的極限位相に関して) となることである．K を Ω の任意のコンパクト集合としよう．$\varphi \in \mathcal{C}_c^0(K)$ の最大値ノルムを $\|\varphi\|$ と書く：$\|\varphi\| = \sup_x |\varphi(x)|$. いま φ を実数値関数とすれば，すべての $x \in \Omega$ に対して $-\|\varphi\| \leqslant$

$\varphi(x) \leqslant \|\varphi\|$. そこで，$g(x)$ を $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に属する非負関数であって，K 上では恒等的に 1 となるものとすれば，すべての $x \in \Omega$ について

$$-\|\varphi\|g(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \|\varphi\|g(x)$$

を得る．線形汎関数 L は正だから，これより

$$-\|\varphi\|L(g) \leqslant L(\varphi) \leqslant \|\varphi\|L(g)$$

を得る．したがって

$$|L(\varphi)| \leqslant L(g)\|\varphi\|.$$

この不等式は，φ が複素数値関数でも成立する．それには，この不等式を $\mathrm{Re}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ にそれぞれ適用すればよいのである[1]．$L(g)$ は φ に従属しない定数だから，これで定理 21.1 は証明された．

さて，分解定理を証明しよう．

定理 21.2. 任意の実 Radon 測度は二つの正 Radon 測度の差に等しい．

μ を実 Radon 測度とする．φ を $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ に属する任意の非負関数として，次のようにおく

$$M(\varphi) = \sup \langle \mu, \varphi_1 \rangle.$$

ここで上限 sup は，すべての $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi(x)$, $(x \in \Omega)$ を動くとして取る．特に M は正であること，すなわち，すべての $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, $\varphi \geqslant 0$ に対し $M(\varphi) \geqslant 0$ であることに注意しよう[2]．さて，ψ をもう一つの連続関数であって，Ω でコンパクトな台をもつものとしたとき

$$M(\varphi+\psi) = M(\varphi)+M(\psi) \tag{21.1}$$

となることを示そう．

21.1 の証明. $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi$, $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \psi$ とすれば，$\varphi_1+\psi_1 \leqslant \varphi+\psi$ だから，ただちに

---

1) そうすると $|L(\varphi)| \leqslant 2L(g)\|\varphi\|$ となる．これでも構わないのだが，$L(\varphi)=|L(\varphi)|e^{i\alpha}$ とおいて $\psi=e^{-i\alpha}\varphi$ を $\psi=\psi_1+i\psi_2$ と分解するならば，$|L(\varphi)|=L(\psi)=L(\psi_1)+iL(\psi_2)$ の両辺を比較して $L(\psi_2)=0$ を得るから，$|L(\varphi)|=L(\psi_1) \leqslant L(g)\|\psi_1\| \leqslant L(g)\|\psi\|=L(g)\|\varphi\|$ とするとよい．

2) φ_1 として恒等的に 0 の関数を考えればわかる．

$$\sup_{0<\varphi_1<\varphi} \langle \mu, \varphi_1 \rangle + \sup_{0<\phi_1<\phi} \langle \mu, \phi_1 \rangle = \sup_{\substack{0<\varphi_1<\varphi \\ 0<\phi_1<\phi}} \langle \mu, \varphi_1 + \phi_1 \rangle$$
$$\leqslant \sup_{0<\chi<\varphi+\phi} \langle \mu, \chi \rangle = M(\varphi+\phi)$$

を得る．これは

$$M(\varphi)+M(\phi) \leqslant M(\varphi+\phi)$$

を意味する．さて，この逆の不等式を証明しよう．

それには，任意の $\chi \in \mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$，$0 \leqslant \chi \leqslant \varphi+\phi$ が

$$\chi = \varphi_1 + \phi_1$$

$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi$，$0 \leqslant \phi_1 \leqslant \phi$ という形に書けることを示せば十分である．そのためには，

$$\varphi_1(x) = \sup(\chi(x)-\phi(x),\ 0) \quad (\forall x \in \Omega)$$

とおいて見ればよい．二つの連続関数の上限をとった関数は連続だから，$\varphi_1 \in \mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ であり，また明らかに非負関数である．$\chi \leqslant \varphi+\phi$ だから明らかに $\varphi_1 \leqslant \varphi$ である．そこで $\phi_1 = \chi - \varphi_1$ とおくと，$\chi(x) \geqslant \phi(x)$ となる点 x においては $\varphi_1(x) = \chi(x)-\phi(x)$ だから $\phi_1(x) = \phi(x)$ となり，$\chi(x) \leqslant \phi(x)$ となる点 x においては $\varphi_1(x) = 0$ だから $\phi_1(x) = \chi(x) \leqslant \phi(x)$ を得る．かくして (21.1) は証明された．

さて次の段階は，汎関数 M を $\mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ に属する必ずしも非負とは限らない関数にまで定義を拡張することである．これは簡単にできる．それは，任意の実数値関数 $\varphi \in \mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ は $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ という形に，φ_1, φ_2 が Ω にコンパクトな台をもつ非負連続関数となるように分解できることに注意すればよいからである (たとえば，$\varphi = \sup(\varphi, 0) - \sup(-\varphi, 0)$)．そうして

$$M(\varphi) = M(\varphi_1) - M(\varphi_2) \tag{21.2}$$

によって定義を拡張する．

$M(\varphi)$ の値が分解 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ のえらび方に関係せずに定まることは，(21.1) からただちにわかる．また，これから，ϕ, φ が実数値ではあるが，いたるところ $\geqslant 0$ でない場合にも (21.1) が成り立つ．最後に，φ が複素数値関数のときには，$M(\varphi)$ を

$$M(\varphi)=M(\mathrm{Re}\,\varphi)+iM(\mathrm{Im}\,\varphi) \tag{21.3}$$

によって定義する．(21.1)が，φ, ψ が複素数値関数のときにも成り立つのは自明であろう．さて，M が線形であることを示そう．もし M が $\mathbf{R}$-線形であることが証明できれば，(21.3)から M が $\mathbf{C}$-線形であることはただちにわかる．

M の $\mathbf{R}$-線形性は(21.1)と M が正であることを用いて，標準的な方法で証明される．p, q を二つの正の整数とすれば，(21.1)からただちに，任意の実数値関数 $\varphi\in\mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ に対して

$$M(p\varphi)=pM(\varphi)$$

を得るから，φ の代りに $(1/p)\varphi$ とおいて見ることにより，$M((1/p)\varphi)=(1/p)M(\varphi)$ を得て，結局

$$M\left(\frac{p}{q}\varphi\right)=\frac{p}{q}M(\varphi)$$

の成り立つことがわかる．これから，$M(r\varphi)=rM(\varphi)$ がすべて有理数 r について成り立つことが出る[1]．さて，λ を任意の実数とすれば，非負な任意の関数 $\varphi\in\mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ と任意の有理数 r_1, r_2 で $r_1\leqslant\lambda\leqslant r_2$ となるものに対して

$$r_1\varphi(x)\leqslant\lambda\varphi(x)\leqslant r_2\varphi(x)$$

がすべての $x\in\Omega$ について成り立つから，M が正であることと有理数に関する線形性によって

$$r_1M(\varphi)\leqslant\lambda M(\varphi)\leqslant r_2M(\varphi)$$

を得る．φ と λ を固定しておいて，r_1 と r_2 をそれぞれ左および右から λ に収束させることにより，$M(\lambda\varphi)=\lambda M(\varphi)$ の成り立つことがわかる．この等式が，φ が実数値関数であれば（非負関数でなくても）常に成り立つことは，(21.2)からわかる．そうすれば，前に述べたように，複素数値関数 φ と複素数 λ の場合にも成り立つことになる．

このようにして，M は $\mathscr{C}_c{}^0(\Omega)$ 上の正線形汎関数になることが証明された．したがって，定理 21.1 により，M は Ω 上の正 Radon 測度である．今後は，M の

1) $r\geqslant 0$ のときは明らか．$r<0$ のときには，$0=\varphi+(-\varphi)$ から出るところの $0=M(\varphi)+M(-\varphi)$，すなわち $M(-\varphi)=-M(\varphi)$ からわかる．

ことを μ^+ と書き，μ^+ のことを μ の**正の部分** (positive part) とよぶことにする．μ の**負の部分** (negative part) μ^- を $-\mu$ の正の部分として定義する．このとき

$$\mu=\mu^+-\mu^-$$

が成り立つ．この証明は読者に委せる．これで定理 21.2 が証明された．

任意の複素測度 μ は四つの正測度の一次結合として，次のように表わされる．

$$\mu=(\mathrm{Re}\,\mu)^+-(\mathrm{Re}\,\mu)^-+i(\mathrm{Im}\,\mu)^+-i(\mathrm{Im}\,\mu)^-$$

実 Radon 測度 μ の**絶対値**を定義するのはやさしい．それは正測度

$$|\mu|=\mu^++\mu^-$$

として定義すればよい[1]．

μ を正 Radon 測度とすれば，定義によって，μ は Ω 上のコンパクトな台をもつ連続関数の空間の上の線形汎関数である．しかし，その定義域は $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ を越えてもっと広い範囲の関数にまで拡げることができる．そのような拡張のもつ諸性質の研究は，測度 μ の積分論である．この意味では，Radon 測度は特別な種類の測度であると考えられる．もっと一般な測度に対して有効な積分の理論を構成することができる．これらの事柄に関しては積分論の書物を参照されたい．

この章では $\mathbf{R}^n$ の開集合の上の Radon 測度を定義した．しかし，そのような定義は，任意の局所コンパクト位相空間の上の Radon 測度の定義に書き換えることのできるのは容易に見当がつく．それは，この章で述べた議論において Ω を局所コンパクト空間を表わす記号であると思えばよいだけである．しかし，ある種の局所コンパクト空間上の Radon 測度のうちには，他の空間にはそれに対応するものが存在しないこともある．たとえば，Lebesgue 測度や密度 $g(x)\,dx$ などである．これらに対応する測度は任意の局所コンパクト空間では存在しない．しかしある種の空間には存在する（たとえば，局所コンパクト群；Lebesgue 測度の役割を果たすのは，いわゆる Haar 測度である）．密度に関する次の結果は，後で用いる．

1)　μ が複素 Radon 測度のときには，$\varphi\in\mathcal{C}_c^0(\Omega)$，$\varphi\geqslant 0$ に対して，$|\mu|(\varphi)=\sup_{|\phi|<\varphi}|\mu(\phi)|$ によって定義する．これが正測度になることは，μ^+ の場合と同様な議論による．

定理 21.3. g_1, g_2 を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の二つの局所可積分な関数とする．このとき，Ω 上の Radon 測度

$$\varphi \mapsto \int \varphi(x) g_1(x)\,dx, \qquad \varphi \mapsto \int \varphi(x) g_2(x)\,dx$$

が一致するための必要十分条件は，$g_1 = g_2$ が Ω 上ほとんど到るところ成り立つことである．

この定理の証明は省略する．積分論の書物ならば，必ず証明が出ているから，読者は参照されたい．

ここで次のことに注意しておこう．局所可積分関数全体の集合は，局所的に L^p ノルムで定義されるような関数の集合のうちで最大のものである．この注意は，後に超関数の**局所的空間** (local space) を研究するときにも通用するが，今はごく限られた場合についてだけ正確に述べておくことにしよう．

p を $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ なる数とする．

定義 21.1. Ω 上の関数 f が**局所的に** L^p (locally L^p) であるとは，Ω の任意のコンパクト集合 K に対して

$$\int_K |f(x)|^p\,dx < +\infty$$

となることをいう．

定理 21.4. 任意の $p, 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ に対して，Ω において局所的に L^p の関数はすべて局所的に L^1，すなわち局所可積分である．

f を局所的に L^p とし，K を Ω の任意のコンパクト集合とすれば，Hölder の不等式によって

$$\int_K^* |f(x)|\,dx \leqslant \|1_K f\|_{L^p} \|1_K\|_{L^{p'}}$$

を得る．ここで 1_K は K の特性関数，すなわち K において 1 に等しく，他では常に 0 となる関数であり；p' は p の共役数[1]，すなわち $p=1$ ならば $p' = +\infty$,

1) 共役複素数ではない．

$1 < p < +\infty$ ならば $p' = p/(p-1)$ である．これからただちに

$$\int_K^* |f(x)|dx < +\infty$$

を得て，f は可測だったから，f の K への制限は $L^1(K)$ に属する．

$\mathbf{R}^n$ の開集合上の超関数

$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上の超関数とは，テスト関数の空間 $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数であって，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に標準的な LF-位相 (13 章例 II, 161頁) を入れたとき連続になるものである．$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の各元はコンパクトな台をもつ Ω 上の (複素数値) $\mathcal{C}^\infty$-関数であった．$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数 L があたえられたとき，それが超関数であるかどうかを判定するには命題 13.1 の系を用いればよい．それは今の場合 (命題 8.5 と併せて)，次のように述べることができる．

命題 21.1. $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ 上の線形形式 L が超関数であるための必要十分条件は，L が次の同値な性質をもつことである．

(a) Ω の任意のコンパクト集合 K に対して，整数 $m \geqslant 0$ と定数 $C > 0$ が存在して，台が K に含まれるようなすべての $\mathcal{C}^\infty$-関数 φ について

$$|L(\varphi)| \leqslant C \sup_{|p| \leqslant m} (\sup_{x \in \Omega} |(\partial/\partial x)^p \varphi(x)|)$$

が成り立つ．

(b) テスト関数の列 $\{\varphi_k\}(k = 1, 2, \ldots)$ がその各階の導関数とともに一様に 0 に収束し [1]，φ_k の台が k に無関係に一定の (Ω の) コンパクト集合 K に含まれているならば，$L(\varphi_k) \to 0$ となる．

超関数の例を作る一つの方法には次のようなものがある．E を Ω 上の関数の空間であって，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ を含むものとする．E には局所凸 Hausdorff 位相が入っ

1) φ_k およびその各階の導関数がそれぞれ一様に 0 に収束すればよいのであって，導関数の階数にまで一様性を要求するのではない．

ていて，それを $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ に誘導したものは $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ の LF-位相よりも粗いとする．そうすれば，E 上の任意の連続線形汎関数 L の $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ への制限が $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ 上の連続線形汎関数，すなわち超関数になる．さらに，次の要請をしよう．E 上の相異なる二つの連続線形汎関数 L_1, L_2 は，上の仕方によって，Ω 上の二つの相異なる超関数になること．このためには，$\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ が E において稠密であるという条件をおかねばならない．このことは明らかであろう．なぜなら，Hahn-Banach の定理によれば，局所凸 Hausdorff 空間の部分空間が稠密であるための必要十分条件は，その部分空間上で 0 になる連続線形汎関数がすべて全空間で 0 になることだから．

上の方式は $E = \mathscr{E}_c^0(\Omega)$ に適用できる．これからただちに，Ω 上の Radon 測度 μ は $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ に制限することによって Ω 上の超関数 T_μ を定義すること；μ_1, μ_2 を Ω 上の Radon 測度で $\mu_1 \neq \mu_2$ とすれば

$$T_{\mu_1} \neq T_{\mu_2}$$

となることがわかる (定理 15.3 の系 2 参照)．これらのことから，超関数 T_μ を Radon 測度 μ と同一視してよいことがわかる．かくして，超関数 T_μ が Radon 測度であるといったり，T_μ の代りに μ と書いたりする．

命題 21.2. Ω 上の超関数 T が Radon 測度であるための条件は，次の同値な性質をもつことである．

(a) 線形形式 $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ は $\mathscr{E}_c^\infty(\Omega)$ に $\mathscr{E}_c^0(\Omega)$ からの誘導位相を入れたとき連続になる．

(b) Ω の各コンパクト集合 K に対して，定数 $C > 0$ が存在して，台が K に含まれるすべての $\mathscr{E}^\infty$ 関数 φ について，不等式

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_x |\varphi(x)|$$

が成り立つ．

(c) テスト関数の列 $\{\varphi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が一様に 0 に収束し，φ_k の台は k に無関係な Ω の一つのコンパクト集合 K に含まれているならば，$\langle T, \varphi_k \rangle \to 0$ となる．

条件(a), (b), (c)の同値なことは，$\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ の LF-位相の定義(13章例II, 161頁)と命題8.5および13.1からただちに出る．したがって，T が Radon 測度であるための必要十分条件は性質(a)であることを示せばよい．まず，必要性は明らかである．T が Radon 測度，すなわち，T は Ω 上の Radon 測度を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の上に制限したものであるとすれば，T は $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ の位相を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に誘導した位相に関して連続である．逆に，$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ がこの誘導位相に関して連続ならば，これは $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ 全体の上の連続線形形式に拡張することができる．これは，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ が $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ において稠密だからである(定理15.3の系2)．この拡張の仕方はもちろん一意的である．それは上に述べたように，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ が $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ で稠密だからである．

Radon 測度であるような超関数のうちで，特に重要なものは次の形の超関数である．

$$\varphi \mapsto \int \varphi(x) f(x)\, dx$$

ここで f は Ω 上の局所可積分関数である．上に述べたように，相異なる Radon 測度は相異なる超関数を定義するから，定理21.3を用いれば，二つの局所可積分関数が同じ超関数を定義するための必要十分条件は，それらの関数がほとんどいたるところ一致することである．このようにして，“ほとんどいたるところ等しい”という関係を法とする局所可積分関数の同値類と，その任意の代表元が定義する超関数を同一視することができる．《超関数 T は関数である》とは，局所可積分関数 f が存在して，T が Radon 測度 $f(x)dx$ に等しいことをいう．このとき，T の代りに f とも書く．f はほとんどいたるところ定義された関数，もっと正確には，関係“$f_1 = f_2$ a.e.[1]”を法とする局所可積分関数の同値類であるとする．

関数に関係した用語はすべて，関数であるような超関数にも適用することとする．したがって，超関数 f が $\mathcal{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ (あるいは L^p) であるとは，f が $\mathcal{C}^k$ 関数(あるいは L^p 関数)の代表元をもつことを意味する．超関数 T が

1) ほとんどいたるところ (almost eveywhere) の略.

多項式であるとか，指数関数，解析関数になるとか，T は整関数として複素空間 $\mathbf{C}^n$ 全体に延長できるなどといういい方をする．繰り返していうと，関数を取り扱うときに使う用語は，すべて関数に等しい超関数に対しても用いる．

もし超関数がすべて Radon 測度になれば，超関数の理論を展開することに大した意味はない．しかしながら，後に見るように，超関数の空間は Radon 測度以外のもっと多くのものを含んでいるのである．このことは，超関数に作用する微分作用素の概念をはっきりさせることによって明らかになるであろう．超関数は何回でも微分することができるようになり，Radon 測度を微分すれば一般には Radon 測度でない超関数を得る．

さて，前に述べた注意に関連していうならば，解析学で用いられる関数であって局所可積分でないものも多い．したがって，それらの関数は公式

$$\varphi \mapsto \int \varphi(x) f(x)\, dx$$

によっては超関数を定義しない．そのような例としては，関数

$$t \mapsto t^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

を実数直線で考えるとよい．可測性は問題ではない．関数 $t \mapsto t^{-k}$ は可測である (原点以外では $\mathcal{C}^\infty$)．困難は実数直線の有界区間上での絶対値の積分にある．実際 ($k \geqslant 1$ より)

$$\int_0^1 t^{-k}\, dt = +\infty$$

である．しかしながら，関数 $t \mapsto t^{-k}$ から実数直線上の超関数を定義する方法は存在する．もっと正確に述べれば，$\mathbf{R}^1$ 上の超関数 S であって，原点の補集合に台をもつすべてのテスト関数 $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^1)$ (すなわち，$t = 0$ のある近傍で 0 になるようなテスト関数) について

$$\langle S, \varphi \rangle = \int \varphi(t) \frac{dt}{t^k}$$

となるものが存在する．実際このような S を求める標準的な方法が存在する．このようにして**擬関数** (pseudofunction) の概念に到達する (今の場合は，超関数 $\mathrm{Pf}\, t^{-k}$)．ここで注意すべきことは，これらの《拡張》S [$\mathbf{R}^1 - \{0\}$ で定義され

た関数 $t \mapsto t^{-k}$ を $\mathbf{R}^1$ 上の超関数に拡張したもの]は，超関数が関数に等しい，という表現の意味では決して関数には等しくないことである．なぜなら，もし S が関数，すなわち一つの局所可積分な関数 $f(t)$ に実数直線上で等しいならば，すべてのテスト関数 φ について

$$\langle S, \varphi \rangle = \int \varphi(t) f(t)\, dt$$

となり，これから，$t \neq 0$ なら $f(t) = t^{-k}$ を得る．これは t^{-k} が局所可積分ということになって矛盾である．

また，関数のなかには，どのような操作によっても超関数を定義しないものもあることに注意しておこう．そのような関数の例としては

$$\mathbf{R}^1 \ni t \mapsto e^{1/t}$$

がある．[$t=0$ ではどのように定義してもよい]．原点の補集合において $t \mapsto e^{1/t}$ と一致するような，$\mathbf{R}^1$ 上の超関数は存在しない[1]．

記号 21.1. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき，Ω 上の超関数全体の空間を $\mathscr{D}'(\Omega)$ で表わす．

演 習 問 題

演習問題中の Ω は $\mathbf{R}^n$ の任意の開集合とする．

21.1. $x^1, x^2, \ldots, x^j, \ldots$ を Ω の任意の点列とし，$a_1, a_2, \ldots a_j, \ldots$ を複素数列であって

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < +\infty$$

とする．このとき，$\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ 上の汎関数

$$\varphi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi(x^j)$$

は Ω 上の Radon 測度になることを証明せよ．

21.2. $\{x_j\}$ を Ω の点列であって Ω には集積点をもたないものとする．このとき，任意の複素数列 $\{a_j\}$ に対して，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の汎関数

---

1) 証明を要するが，ここでは述べない．

$$\varphi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} a_j D^j \varphi(x^j), \qquad D^j\varphi = (\partial/\partial x_1)^j \cdots (\partial/\partial x_n)^j \varphi$$

は Ω 上の超関数になることを証明せよ．

21.3. x^0 を Ω の任意の点とする．このとき，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ 上の汎関数

$$\varphi \mapsto [(\partial/\partial x_1)\varphi](x^0)$$

は Ω 上の超関数ではあるが Ω 上の Radon 測度ではないことを証明せよ．

21.4. $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ を $\mathbf{R}^n$ 上のユークリッド的ノルムとする．このとき，s を実数として，可測関数 $x \mapsto |x|^s$ が関数であるような[1] $\mathbf{R}^n$ 上の超関数を定義するためには s はどのような条件を満足すればよいか．

21.5. Ω 上の超関数 T がすべての非負な $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に対して $\langle T, \phi \rangle \geqq 0$ を満たすならば，T は正 Radon 測度である．これを証明せよ．

---

1) すなわち，局所可積分関数になるような．

22.

多項式と形式的巾級数．解析的汎関数

(双対空間の他の例として)

多項式と形式的巾級数

複素係数をもつ n 変数の多項式全体のなす空間を $\mathcal{P}_n$ で表わすことにしよう．この空間は，しばしば $\mathbf{C}[X_1,\dots, X_n]$ と書かれる．これを $\mathcal{P}_n$ と書くのは，記号を簡単にするためと，われわれの興味がその環としての構造ではなくて，その位相ベクトル空間としての構造であることを示すためである．$\mathcal{P}_n$ の部分ベクトル空間として，次数が $\leqslant k$ の多項式全体からなるものを $\mathcal{P}_n^k$ と書くことにしよう ($k=0, 1, 2,\dots$)．各々の $\mathcal{P}_n^k$ は有限次元であり，実際，その次元は計算すれば，

$$(k+n)!\ /k!\,n!$$

に等しい．$\mathcal{P}_n$ には，Hausdorff 有限次元空間の列 $\mathcal{P}_n^k$，$k=0, 1,\dots$ の帰納的極限である局所凸位相を入れる (13 章例 I 参照)．

また，他方，n 変数の形式的巾級数全体のなす空間 $\mathcal{Q}_n$ を考える．$\mathcal{Q}_n$ は通常 $\mathbf{C}[[X_1,\dots, X_n]]$ と書き表わすことが多い．$\mathcal{Q}_n$ には，各係数の [単純] 収束の位相を入れる．この位相はセミノルムの列

$$u=\sum_{p\in\mathbf{N}^n} u_p X^p \mapsto \sup_{|p|\leqslant k} |u_p|, \qquad k=0, 1,\dots$$

によって定義されるものである．この位相によって，$\mathcal{Q}_n$ は Fréchet 空間にな

る (10 章，例 III 参照)．

さて，多項式と形式的巾級数の間には自然な双対性が存在する．それは，次の括弧式によってあたえられる．

$$\langle P, u\rangle = \sum_{p\in\mathbf{N}^n} P_p u_p,$$

ただし，

$$P = \sum_p P_p X^p, \qquad u = \sum_p u_p X^p$$

である．ここで係数 P_p は有限個を除いてすべて 0 であることに注意する．このことから，括弧式 $\langle P, u\rangle$ が意味を持つ．このとき，主結果は次の定理である．

定理 22.1. (a) 写像

(22.1) $$u \mapsto (P \mapsto \langle P, u\rangle)$$

は，形式的巾級数の Fréchet 空間 $\mathcal{Q}_n$ から多項式の LF-空間 $\mathcal{P}_n$ の強双対の上への位相ベクトル空間構造の同形写像である．

(b) 写像

(22.2) $$P \mapsto (u \mapsto \langle P, u\rangle)$$

は $\mathcal{P}_n$ から $\mathcal{Q}_n$ の強双対の上への同形写像である．

証明 証明は幾つかの段階に分けて行なう．各段階はすべて簡単である．まず，任意の形式的巾級数 u と，その次数が $\leqslant k$ となる任意の多項式 P に対して

$$|\langle P, u\rangle| \leqslant \Big(\sum_{p\in\mathbf{N}^p} |P_p|\Big)\cdot\sup_{|p|<k}|u_p|$$

が成り立つ．この不等式からただちに，写像 (22.1), (22.2) がともに連続になることがわかる[1]．したがって，証明すべきことは，これらの写像が一対一，上への写像であり，それらの逆写像も連続になることである．

1) 強双対位相の定義にもどって考えるとよい．なお，命題 14.6 参照．

写像が一対一であること．

P として単項式 $X^p = X_1^{p_1} \cdots X_n^{p_n}$ をとる．これは，$q \neq p$ ならば $P_q = 0$ であり，$P_p = 1$ となることを意味する．このとき

$$\langle P, u\rangle = u_p, \qquad \forall u \in \mathcal{Q}_n.$$

もし線形汎関数 $P \mapsto \langle P, u\rangle$ が 0 ならば，上式からすべての p について $u_p = 0$，すなわち $u = 0$ となる．

また，あたえられた多項式 P に対して，線形汎関数

$$u \mapsto \langle P, u\rangle$$

が $\mathcal{Q}_n$ 上で恒等的に 0 になるならば，u として前と同様に単項式 X^p をとることによって $P_p = 0$ を得る．p は任意だから，$P = 0$ を得る．

写像が上への写像であること．

写像 (22.1) の方から始めよう．L を $\mathcal{P}_n$ 上の任意の連続線形汎関数とする．各 p に対して，$P(X) = X^p$ のとき，

$$u_p = L(P)$$

とおけば，

$$u = \sum_p u_p X^p$$

は一つの形式的巾級数であり，明らかに

$$L(P) = \langle P, u\rangle, \qquad \forall P \in \mathcal{P}_n$$

が成り立つ．

次に (22.2) を考えよう．M を $\mathcal{Q}_n$ 上の任意の連続線形汎関数とする，M が単項式 X^p においてとる値を v_p として，形式的巾級数

$$v = \sum_p v_p X^p$$

を考える．M の連続性から，有限個の p を除いては，$v_p = 0$ が出る．実際，連続性から，定数 $C > 0$ と整数 $k \geqslant 0$ が存在して，すべての形式的巾級数 u に対して

$$|M(u)| \leqslant C \sup_{|p| \leqslant k} |u_p|$$

が成り立つ．この式から，特に，$|p| \leqslant k$ なる p に対する u_p が 0 になるような

すべての形式的巾級数uに対して，$M(u)=0$を得る．したがって

$$v_p = M(u) = 0, \qquad (u = X^p,\ |p| > k \text{ のとき}).$$

かくして，vは多項式であり，このことからただちに，すべての形式的巾級数uについて

$$M(u) = \langle v, u\rangle$$

の成立することがわかる．

(22.1) および (22.2) の逆写像が連続になること．

Lを$\mathcal{P}_n$上の連続線形形式とし，uをそれに対応する形式的巾級数とする．Lが$\mathcal{P}_n$の強双対において0に収束するとは，$\mathcal{P}_n$の任意の有界集合の上でLが一様に0に収束することを意味する．有界集合として一点，特に単項式X^pからなる集合をとることにすれば，Lが$\mathcal{P}'_n$で0に収束することから，$u_p = L(X^p)$が各pについて0に収束することになる．これは丁度，uが$\mathcal{Q}_n$において0に収束することを意味している．これは，写像 (22.1) の逆が連続であることを示す．次に (22.2) の逆写像をしらべよう．$\mathcal{V}$を$\mathcal{P}_n$の0の任意の凸近傍とする．各$k=1,2,\ldots$に対して．$\mathcal{V}\cap\mathcal{P}_n^k$は次の形の集合

$$\mathcal{W}^k = \{v = \sum_{|p|\leqslant k} v_p X^p\ ; \quad \sum_{|r|\leqslant k} |v_r| \leqslant \rho_k\},\ \ \rho_k > 0$$

を含む．ここで$\{\rho_k\}$は0に収束する減少列であると仮定してよい．集合列$\mathcal{W}^k$の合併$\mathcal{W}$は一般には$\mathcal{P}_n$の0の近傍ではないが，その凸包$\Gamma(\mathcal{W})$は$0\in\mathcal{P}_n$の近傍である．明らかに$\Gamma(\mathcal{W})\subseteq\mathcal{V}$である．他方，形式的巾級数の有界集合

$$B = \{u = \sum u_p X^p\ ; \quad \sup_{|p|\leqslant k} |u_p| \leqslant \rho'^{-1}_k,\ \ k = 1, 2, \ldots\}$$

を考えよう[1]．ここで

$$\rho'_k = 2^{-k-1}\rho_k$$

とする．vを次数が$\leqslant k$である多項式で，その定義する$\mathcal{Q}_n$上の連続線形汎関数$u\mapsto\langle u, v\rangle$が$B$の極集合に属するものとしよう．$u$を次のように定める．

---

1) $\mathcal{Q}_n$の部分集合Sが有界であるための必要十分条件は，集合$S_p=\{c\,;\,\exists u\in S,\ u_p=c\}$が$\mathbf{C}$で有界なことである．これは有界集合の定義から容易にわかる．

$$u_p = \begin{cases} \rho'^{-1}_{|p|}\bar{v}_p/|v_p| & (v_p \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (v_p = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

そうすれば，u は明らかに有界集合 B に属するから，

$$\langle u, v\rangle = \sum \rho'^{-1}_{|p|}|v_p| \leqslant 1 \tag{22.3}$$

を得る．そこで，各整数 $h = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$v_h = \sum_{|p|=h} v_p X^p$$

とおく（v_h は v の h 次斉次部分である）と，(22.3) から

$$\sum_{|p|=h} |v_p| \leqslant \rho'_h = 2^{-h-1}\rho_h$$

を得る．これは $2^{h+1}v_h \in \mathscr{W}^h$ なることを示す．ところが $\sum_{h=0}^k 2^{-h-1} < 1$ だから，$v = \sum_{h=0}^k v_h = \sum_{h=0}^k 2^{-h-1}(2^{h+1}v_h)$ は $\mathscr{W}^h$ の合併の凸包に属する．すなわち，$\Gamma(\mathscr{W}) \subseteq \mathscr{V}$ に属する．これは，$\mathcal{Q}_n$ の双対から $\mathcal{P}_n$ の上への標準的同形写像によって，B の極集合 B^0 が $\mathscr{V}$ の中へ写されること，換言すれば，$\mathscr{V}$ の逆像が $\mathcal{Q}_n$ の強双対における 0 の近傍になっていることを示す．(証終)．

さて，$\mathcal{P}_n$，$\mathcal{Q}_n$ について，その乗法の構造を無視するならば，これらは $\mathbf{N}^n$ を定義域とする複素数値関数の集合と見なすことができる．すなわち，多項式や形式的巾級数を単にその係数の集まりと見なして，$u = \sum_{p\in\mathbf{N}^n} u_p X^p$ と書くかわりに $u = (u_p)_{p\in\mathbf{N}^n}$ と書くことにするのである．そうすれば，$\mathcal{Q}_n$ は $\mathbf{N}_n$ 上のすべての複素数値関数の空間となり，$\mathcal{P}_n$ は有限集合の外では 0 になる関数全体の空間となる．これは，いうまでもなく，$\mathcal{Q}_n$ を n 個の添字をもつ任意の複素数列の空間，$\mathcal{P}_n$ を有限数列の空間と同一視することである．また，次のようにも書くことができる．

$$\mathcal{Q}_n = \prod_{p\in\mathbf{N}^n} \mathbf{C}_p, \qquad \mathbf{C}_p \simeq \mathbf{C} : \text{複素平面}.$$

そうすれば，$\mathcal{P}_n$ は $\mathbf{C}_p (p \in \mathbf{N}^n)$ の直和と見なすことができる．もちろん，$\mathcal{Q}_n$ における係数の単純収束の位相は，丁度 $\mathbf{C}_p (p \in \mathbf{N}^n)$ の直積位相に一致している等々．また LF-空間 $\mathcal{P}_n$ は $\mathcal{Q}_n$ の強双対に標準的に同形であるが，$\mathcal{Q}_n$ に連続に埋め込まれ，かつ $\mathcal{Q}_n$ において稠密であることに注意しておこう．

$\mathbf{C}^n$ の開集合 Ω 上の解析的汎関数

$H(\Omega)$ を Ω 上の正則関数[1] の全体のなす空間に，$\mathcal{E}^k(\Omega)(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$($\mathbf{C}^n$ を $\mathbf{R}^{2n}$ と同一視した) の任意の一つからの誘導位相を入れたものとする[2]. たとえば，$H(\Omega)$ は Ω の各コンパクト集合上の一様収束の位相，すなわち $\mathcal{E}^0(\Omega)$ による誘導位相をもつと考えてよい.

定義 22.1. $H(\Omega)$ の双対空間を $H'(\Omega)$ で表わし，その各元を Ω 上の**解析的汎関数** (analytic functional) とよぶ.

$H(\Omega)$ が $\mathcal{E}^0(\Omega)$ に [位相もこめて] 同形的に含まれていることから. Hahn-Banach の定理によって，$H(\Omega)$ 上の任意の連続線形汎関数 L は $\mathcal{E}^0(\Omega)$ 上の連続線形汎関数 $\tilde{L}$ に拡張することができる. この $\tilde{L}$ を $\mathcal{E}_c{}^0(\Omega)$ に制限すれば，それは Ω 上の一つの Radon 測度となる. $\mathcal{E}_c{}^0(\Omega)$ は $\mathcal{E}^0(\Omega)$ で稠密だから，この Radon 測度 μ は $\tilde{L}$ を一意的に決定する. しかし，$\tilde{L}$ は ($\Omega=\emptyset$ の場合を除けば) Lによっては一意的には決まらない. μ もまた，L によって一意的には定まらない. この理由は，次の例によっても，容易に了解できる[3]. たとえば ϕ を Ω 上の $\mathcal{E}^1$ 関数であって，コンパクトな台をもつものとして，ϕ_0 を次の式によって定めよう.

$$\phi_0 = \partial\phi/\partial\bar{z}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+i\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\right), \qquad i=(-1)^{1/2}$$

ϕ_0 は Ω 上のコンパクトな台をもつ連続関数となる. このとき，もし Radon 測度 μ が解析的汎関数Lを定義するとすれば，Radon 測度 $\mu+\phi_0$[4] もまた同じ解析的汎関数 L を定義することになる. これは，ϕ_0 によって定義される解析的汎

---

1) holomorphic function，複素解析関数のこと.

2) どの $\mathcal{E}^k(\Omega)$ から誘導しても位相は同じ (10 章，例 2).

3) 理論的には，$H(\Omega)$ が $\mathcal{E}^0(\Omega)$ において稠密でないことから明らかであるが (Hahn-Banach), それを具体例で示そうというのである.

4) もっと正確には，$\mu+\phi_0(x,y)dx\,dy$.

関数が 0 になることからわかる．ϕ_0 によって定義される解析的汎関数とは

$$H(\Omega) \ni h \mapsto \int h(x+iy)\phi_0(x, y)dx\,dy$$

であり，この積分は，ϕ_0 が台がコンパクトな Ω 上の連続関数だから意味をもつ．ところで，部分積分によって直ちに

$$\int h(x+iy)\phi_0(x, y)dx\,dy = \int h(x+iy)\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}_1}(x, y)dx\,dy$$
$$= -\int \frac{\partial h}{\partial\bar{z}_1}(x+iy)\phi(x, y)dx\,dy = 0$$

を得るのである．

一般には，すなわち，Ω が $\mathbf{C}^n$ の勝手な開集合のときには，Ω 上の解析的汎関数を関数として解釈するような自然な方法はない．しかし，Ω が非常に簡単な形をしているとき，たとえば Ω が多重円板のときには，そのような解釈が可能になる．これを説明しよう．

記号 22.1. $K_1,\ldots, K_n$ を n 個の数とし，$0 < K_j \leqslant +\infty\ (j = 1,\ldots, n)$ とする．このとき，$\Delta(K_1,\ldots, K_n)$ あるいは簡単に $\Delta(K)$ によって**開多重円板** (open polydisk)

$$\{z \in \mathbf{C}^n\ ;\ |z_1| < K_1,\ldots, |z_n| < K_n\}$$

を表わすことにする．

記号 22.2. $K_1,\ldots, K_n$ を n 個の非負な有限の数として，$\mathrm{Exp}(K_1,\ldots, K_n)$ あるいは簡単に $\mathrm{Exp}(K)$ によって，**指数型** (exponential type) が $(K_1,\ldots, K_n)$ の整関数全体の空間を表わすことにする．$\mathbf{C}^n$ 上の整関数 f が指数型 $(K_1,\ldots, K_n)$ であるとは，定数 $A(f) > 0$ が存在して

$$|f(z)|\exp(-K_1|z_1| - \cdots - K_n|z_n|) \leqslant A(f) \tag{22.4}$$

がすべての $z \in \mathbf{C}^n$ について成り立つことをいう．

$f \in \mathrm{Exp}(K)$ に対して，(22.4) をみたす $A(f)$ の inf を対応させれば，これ

は Exp(K) における一つのノルムと考えることができる. これが実際にノルムになることを検証するのは容易である. このノルムによる Exp(K) 上の位相は, すべての整関数の空間 $H(\mathbf{C}^n)$ からの誘導位相よりも真に細かい. また, 容易にわかるように, $K_1' \leqslant K_1, \dots, K_n' \leqslant K_n$ ならば $\mathrm{Exp}(K') \subseteq \mathrm{Exp}(K)$ が成り立つ.

記号 22.3. $K_1, \dots, K_n$ を n 個の数で $0 < K_j < +\infty$ $(j = 1, \dots, n)$ とする. このとき, $K_1' < K_1, \dots, K_n' < K_n$ となるようなすべての $K' = (K'_1, \dots, K'_n)$ に対する Exp(K') の合併を $\widetilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ で示すことにする.

ベクトル空間 $\widetilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ では位相を考慮することはしない. さて. 主結果は次の定理である,

定理 22.2. $K_1, \dots, K_n$ を n 個の正数とする. そのうちの幾つかは無限大でもよいとする.

任意の関数 $f \in \widetilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ に対して, 複素係数の n 変数多項式 ($\mathbf{C}^n$ 上の多項式関数, すなわち $z_1, \dots, z_n$ の多項式) の空間 $\mathcal{P}_n$ 上の線形汎関数

$$P = \sum_p P_p z^p \mapsto \langle f, P \rangle = \sum_p P_p f^{(p)}(0)$$

を考えれば, この線形汎関数は $H(\varDelta(K))$ 上の連続線形汎関数すなわち, 開多重円板 $\varDelta(K)$ 上の解析的汎関数 μ_f に一意的に拡張することができる. さらに, 写像 $f \mapsto \mu_f$ は, $\widetilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ から $H(\varDelta(K))$ の双対 $H'(\varDelta(K))$ の上への (ベクトル空間構造に関する) 同形写像となる. この逆写像は次の公式

$$f(\zeta) = \langle \mu_f, e^{\langle z, \zeta \rangle} \rangle, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n$$

によってあたえられる. ここで μ_f は変数 $z \in \varDelta(K)$ の関数に作用するものとする.

証　明　証明は $f^{(p)}(0)$ ($f \in \widetilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$) の評価式に基づく. この評価式とは Cauchy の公式からただちに得られるものである. さて, f は整関数だから, 任

意の n 個の数 $r_1,\ldots,r_n>0$ に対して Cauchy の公式

$$\frac{1}{p!}f^{(p)}(0)=(2i\pi)^{-n}\oint_{|z_1|=r_1}\cdots\oint_{|z_n|=r_n}\frac{f(z)}{z^p}\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_n}{z_n}$$

が成り立つことを思い出そう．ここで，$p!=p_1!\cdots p_n!$ であり，$z^p=z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}$ である．この公式からただちに，次の Cauchy の不等式

$$(22.5)\qquad |f^{(p)}(0)|\leqslant p!\,r_1^{-p_1}\cdots r_n^{-p_n}\sup_{|z_1|=r_1,\cdots,|z_n|=r_n}|f(z)|$$

を得る．$f\in\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ より，$A>0$, $\varepsilon>0$ (ただし $\varepsilon<K_j$ $j=1,\ldots,n$) が存在して，すべての z に対して

$$(22.6)\qquad |f(z)|\leqslant A\exp((K_1-\varepsilon)|z_1|+\cdots+(K_n-\varepsilon)|z_n|)$$

が成り立つ．(22.5) と (22.6) を合せて

$$(22.7)\qquad |f^{(p)}(0)|\leqslant Ap!\,r_1^{-p_1}\cdots r_n^{-p_n}\exp((K_1-\varepsilon)r_1+\cdots+(K_n-\varepsilon)r_n)$$

を得る．

さて，次は (22.7) の右辺が最小になるような r_j $(j=1,\cdots,n)$ のえらび方を考えよう．r $[r\geqslant 0]$ の関数

$$r^{-\beta}e^{Br},\ \text{ただし}\quad \beta:\text{整数}\geqslant 0,\ B>0$$

を考察してみる．もし $\beta=0$ ならば，この関数は $r=0$ で最小となるが，$\beta\neq 0$ ならば，導関数を計算してみることによって，$r=\beta/B$ で最小となることがわかり，その最小値は

$$B^\beta(e/\beta)^\beta$$

である．Stirling の公式 1) を考慮すれば，適当な定数 A_1 に対して

$$(e/\beta)^\beta\leqslant A_1(\beta!)^{-1}\beta^{1/2},\ (\beta\neq 0)$$

が成り立つから，いずれの場合でも (A_1 を十分大きくとれば)，次式が成立する．

$$\inf_{r>0}(r^{-\beta}e^{Br})\leqslant A_1B^\beta(\beta!)^{-1}\beta^{1/2}$$

この式を考慮すれば (22.7) は

$$|f^{(p)}(0)|\leqslant AA_1(K_1-\varepsilon)^{p_1}\cdots(K_n-\varepsilon)^{p_n}p_1^{1/2}\cdots p_n^{1/2}$$

---

1) $\beta!=\sqrt{2\pi}\,\beta^{\beta+1/2}e^{-\beta}c(\beta)$, $\lim_{\beta\to\infty}c(\beta)=1$. (高木貞治 "解析概論" 259 頁参照)

となるが，ここで ε をさらに小さいもので置き換えれば，A_1 をとりかえることにより，次式を得る[1].

$$|f^{(p)}(0)| \leqslant AA_1(K_1-\varepsilon)^{p_1}\cdots(K_n-\varepsilon)^{p_n}, \qquad \forall\, p \in \mathbf{N}^n. \tag{22.8}$$

この公式を定理 22.2 の証明の基礎とする．さて，g を任意の整関数とし，

$$r_1 = K_1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad ,\ldots,\ r_n = K_n - \frac{\varepsilon}{2}$$

として，評価式 (22.5) を f の代りに g に適用すれば，次式を得る．

$$\frac{1}{p!}|g^{(p)}(0)| \leqslant \left(K_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-p_1}\cdots\left(K_n-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-p_n} \sup_{|z_j|=K_j-\varepsilon/2,\, j=1,2,\ldots,n} |g(z)|. \tag{22.9}$$

ここで g として多項式をとれば，

$$|\langle f, g\rangle| = \left|\sum_p \frac{1}{p!} f^{(p)}(0) g^{(p)}(0)\right| \leqslant \sum_p |f^{(p)}(0)| \frac{1}{p!} |g^{(p)}(0)|.$$

この式に (22.8) と (22.9) を代入すれば，

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant AA_1 \sum_p \theta_1{}^{p_1}\cdots\theta_n{}^{p_n} \sup_{z\in\Delta(K-\varepsilon/2)} |g(z)|$$

を得る．ただし $K-\varepsilon/2$ とは $(K_1-\varepsilon/2,\ldots, K_n-\varepsilon/2)$ のことであり，$\theta_j = (K_j-\varepsilon)/(K_j-\varepsilon/2)$, $j=1,\ldots,n$ とする．したがって，

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant AA_1(1-\theta_1)^{-1}\cdots(1-\theta_n)^{-1} \sup_{z\in\Delta(K-\varepsilon/2)} |g(z)|$$

が成り立つ．多重円板 $\Delta(K-\varepsilon/2)$ は，多重円板 $\Delta(K)$ の相対コンパクト集合だから，この評価式は線形汎関数

$$g \mapsto \langle f, g\rangle$$

が，多項式全体の空間に $H(\Delta(K))$ の位相を誘導したものの上で連続になっていることを示す．したがって，この線形形式は $H(\Delta(K))$ 全体の上に一意的に連続線形形式として拡張できる．なぜなら，多項式全体は $H(\Delta(K))$ において稠密だからである．実際，$g \in H(\Delta(K))$ ならば，その**有限 Taylor 展開** (finite Taylor expansion)[2] は $H(\Delta(K))$ において g に収束する (定理 15.1 と 15.2 参

1) $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ となる ε' をとれば，$(K_j-\varepsilon)^{p_j} p_j{}^{1/2}/((K_j-\varepsilon')^{p_j}$ は $p_j \to \infty$ のとき 0 に近づくから，定数 A_1 をとり換えることによって (22.8) を得る．ただし ε' の代りに ε と書く．

2) Taylor 展開を有限項で打ち切ったもの.

照)．かくして，関数 $f \in \tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ に対応して開多重円板 $\varDelta(K)$ 上の解析的汎関数 μ_f が定義された．

写像 $f \mapsto \mu_f$ は明らかに線形である．これが一対一になることを示そう．そのためには，$g \mapsto \langle f, g\rangle$ が多項式の空間 $\mathcal{P}_n$ 上の連続線形汎関数であることに注意すればよい．多項式と形式的巾級数の間の双対性と考えたときには，同じものであるが，$g \mapsto \langle \tilde{f}, g\rangle$ と書いた方が［区別のためには］良かったかもしれない．(この章の最初の部分参照)．ただし $\tilde{f} = \sum_p f^{(p)}(0)X^p$ とする．既知のように，この線形形式が恒等的に 0 になるための必要十分条件は，f のすべての係数が 0 であること，すなわち，すてべの p について $f^{(p)}(0) = 0$ となることである．f は整関数であるから，これは $f \equiv 0$ であることを意味する．

残るところは，$f \mapsto \mu_f$ が上への写像になることである．このために定理 22.2 に最後の部分に述べている逆写像の公式を用いる．実際，いま μ を開多重円板 $\varDelta(K)$ 上の任意の解析的汎関数としてみよう．整関数

$$z \mapsto e^{\langle z, \zeta\rangle}$$

を $\varDelta(K)$ に制限したものはもちろん $H(\varDelta(K))$ に属するから，

$$\langle \mu, e^{\langle z, \zeta\rangle}\rangle$$

は意味をもつ．そして，この値は $\zeta \in \mathbf{C}^n$ の関数である．この関数を f で示すことにする．この f が実は整関数であって $\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}(K)$ に属することおよび $\mu = \mu_f$ となることを証明しよう．

μ の連続性から，定数 $C > 0$ と $\varDelta(K)$ の相対コンパクト開集合 U が存在して，すべての $h \in H(\varDelta(K))$ に対して

$$|\langle \mu, h\rangle| \leqslant C \sup_{z \in U} |h(z)| \tag{22.10}$$

が成り立つことがわかる．［U が相対コンパクトなことから］$\varepsilon > 0$ が存在して $U \subseteq \varDelta(K-\varepsilon)$，ただし $K-\varepsilon = (K_1-\varepsilon, \ldots, K_n-\varepsilon)$ である．p を任意の n-系として，$h(z) = z^p$ とすれば，(22.10) から

$$|\langle \mu, z^p\rangle| \leqslant C(K_1-\varepsilon)^{p_1} \cdots (K_n-\varepsilon)^{p_n} \tag{22.11}$$

を得る．ところで，z の関数 $\exp(\langle z, \zeta\rangle)$ の Taylor 展開は $H(\mathbf{C}^n)$ においてこの関数に収束するから，$H(\varDelta(K))$ においても収束する．したがって，μ の連続

性から，

$$f(\zeta)=\langle\mu, e^{\langle z,\zeta\rangle}\rangle=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{p!}\zeta^p\langle\mu, z^p\rangle. \tag{22.12}$$

この右辺の巾級数は，(22.11) によって，すべての $\zeta\in\mathbf{C}^n$ に対して収束する．したがって f は整関数であるが，(22.11) からさらに

$$\begin{aligned}|f(\zeta)| &\leqslant C\sum_p\frac{1}{p!}(K_1-\varepsilon)^{p_1}\cdots(K_n-\varepsilon)^{p_n}|\zeta^p|\\ &= C\exp\{(K_1-\varepsilon)|\zeta_1|+\cdots+(K_n-\varepsilon)|\zeta_n|\}\end{aligned}$$

が成り立つ．

最後に，$\mu=\mu_f$ を示そう．h を任意の多項式としたとき，(22.12) を用いれば

$$\begin{aligned}\langle f,h\rangle &= \sum_p\frac{1}{p!}f^{(p)}(0)h^{(p)}(0)=\sum_p\frac{1}{p!}\langle\mu, z^p\rangle h^{(p)}(0)\\ &= \left\langle\mu,\left(\sum_p\frac{1}{p!}h^{(p)}(0)z^p\right)\right\rangle=\langle\mu, h\rangle\end{aligned}$$

(証終).

さて，今度は Ω を $\mathbf{C}^n$ の任意の開集合としよう．h を整関数とすれば，h を Ω に制限したものは明らかに $H(\Omega)$ に属するから，μ を Ω 上の任意の解析的汎関数とすれば，μ の h における値 $\langle\mu, h\rangle$ を考えることができる．このとき，$h\mapsto\langle\mu, h\rangle$ が $H(\mathbf{C}^n)$ の上の連続線形汎関数になること，すなわち $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数になることは明らかである ($\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数のことを ["$\mathbf{C}^n$ 上の" を略して] 単に "解析的汎関数" ということがある)．μ_1, μ_2 を共に Ω 上の解析的汎関数としたとき，$\langle\mu_1, h\rangle=\langle\mu_2, h\rangle$ がすべての $h\in H(\mathbf{C}^n)$ について成り立つが，すべての $h\in H(\Omega)$ については成り立たないということはあり得る．Hahn-Banach の定理によれば，このようなことが起こるのは，整関数の Ω への制限の全体が $H(\Omega)$ において稠密な部分空間を作らないときである．換言すれば，Ω が Runge 領域 (定義 15.1) にならないときである．多重円板は Runge 領域であったことを思い出そう．このようにして，Ω 上の解析的汎関数の空間 $H'(\Omega)$ が $H(\mathbf{C}^n)$ の線形部分空間と [位相のことを度外視して] 標準的に同一視できるための必要十分条件は，Ω が Runge 領域であることがわかっ

た．

さて，次の用語をもちいることにしよう．

定義 22.2. $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数 μ が開集合 $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ によって**支持されている** (carried by, supported by) とは，Ω の相対コンパクトな開部分集合 U と定数 $C>0$ が存在して，すべての整関数 h について

$$|\langle \mu, h\rangle| \leqslant C \sup_{z\in U}|h(z)|$$

が成り立つことをいう．

換言すれば，μ が Ω に支持されているとは，整関数の Ω への制限全体の上で定義されている線形形式 $h \mapsto \langle \mu, h\rangle$ が $H(\Omega)$ 全体の上の連続線形形式に拡張できるということである．さらに Ω が Runge 領域ならば，この拡張は一意的であるし，一意的であれば Ω は Runge 領域である．

定義 22.3. μ を $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数とするとき，$\zeta \in \mathbf{C}^n$ の関数

$$\langle \mu, e^{\langle z, \zeta\rangle}\rangle$$

を μ の **Fourier–Borel 変換** (Fourier–Borel transform) といい，$\hat{\mu}$ によって表わす．

書物によっては，$\hat{\mu}$ のことを **Fourier–Laplace 変換** (Fourier–Laplace transform) ということもある．これらの定義を用いれば，定理 22.2 は次のように述べることができる．

定理 22.3. Fourier–Borel 変換は，$\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数の空間から $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数の空間の上への線形同形写像である．

実数の任意の n-系 $(K_1, \dots, K_n)$，$0 < K_j \leqslant +\infty$ $(j=1,2,\dots n)$ に対して，解析的汎関数 μ が開多重円板

$$\{z \in \mathbf{C}^n\,;\, |z_1| < K_1, \cdots, |z_n| < K_n\}$$

に支持されているための必要十分条件は，正数 A, ε が存在して，すべての

$\zeta\in\mathbf{C}^n$ について

$$|\hat{\mu}(\zeta)|\leqslant A\exp\{(K_1-\varepsilon)|\zeta_1|+\cdots+(K_n-\varepsilon)|\zeta_n|\}$$

が成り立つことである．

演　習　問　題

22.1. $\mathcal{Q}_n$ (n 変数の形式的巾級数全体のなす Fréchet 空間) を LF-空間 $\mathcal{P}_n$ (n 変数の多項式全体のなす空間) の双対として考える．このとき，$\mathcal{Q}_n$ は $\mathcal{P}_n$ の代数的双対と一致すること，さらに $\mathcal{Q}_n$ 上では弱および強双対位相が一致することを証明せよ．また，$\mathcal{Q}_n$ の代数的双対は $\mathcal{P}_n$ には等しくないことを証明せよ．

22.2. 多項式 $P\in\mathcal{P}_n$ に対して，P の各係数を共役複素数で置き換えて得られる多項式を $\bar{P}$ と書くことにする．空間 $\mathcal{P}_n$ は，エルミート形式

$$(P|Q)=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{p!}P^{(p)}(0)\bar{Q}^{(p)}(0)$$

によって Hausdorff 準 Hilbert 空間になる．このとき，準 Hilbert 空間 $\mathcal{P}_n$ から $\mathbf{C}^n$ 上の整関数の空間 $H(\mathbf{C}^n)$ への標準的単射は連続になり，さらに，$\mathcal{P}_n$ の完備化 $\hat{\mathcal{P}}_n$ から $H(\mathbf{C}^n)$ の線形部分空間の上への単射に拡張されることを証明せよ．(その線形部分空間を Λ_n^2 で表わす．) Λ_n^2 の元をその ($z=0$ のまわりの) Taylor 展開によって特徴ずけよ．空間 Λ_n^2 は平行移動によって不変になるだろうか ($H(\mathbf{C}^n)$ の部分集合 A が平行移動によって不変であるとは，すべての $f\in A$ とすべての $z^0\in\mathbf{C}^n$ に対して関数 $z\mapsto f(z-z^0)$ が A に属することを意味する)?

22.3. 空間 $\mathrm{Exp}(K)$ (記号 22.2 参照) は，ノルム

$$\sup_{z\in\mathbf{C}^n}\{|f(z)|\exp(-(K_1|z_1|+\cdots+K_n|z_n|))\} \tag{22.13}$$

によって Banach 空間になることを証明せよ．

22.4. $3n$ 個の正数 K_j, K_j', K_j'' $(1\leqslant j\leqslant n)$ を考えよう．ただし，各 j について $K_j<K_j'<K_j''$ とする．このとき，$\mathrm{Exp}(K)$ は $\mathrm{Exp}(K')$ において $\mathrm{Exp}(K'')$ から導かれた位相に関して稠密になることを証明せよ (記号 22.2 参照；位相はそれぞれ (22.13) 型のノルムで定義されたものとする)．また，$\mathrm{Exp}(K)$ から $\mathrm{Exp}(K')$ への自然な単射は連続であるが同形写像ではないことを証明せよ．

22.5. $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数の全体，すなわち $K=(K_1,\dots,K_n)$ が n 個の非負実数の空間 $\mathbf{R}_+^n$ を動くときの $\mathrm{Exp}(K)$ をすべて合併したもののなす線形空間を Exp と表わすことにする．Exp に次のように位相を入れる：Exp の凸部分集合 U が 0 の近傍である

とは，U と $\mathrm{Exp}(K)$，$K\in\mathbf{R}^n_+$ との共通部分が常に Banach 空間 $\mathrm{Exp}(K)$ の 0 の近傍になるときにいう．このとき，Exp の凸集合 U が Exp の 0 の近傍になるための必要十分条件は，すべての n-系 $p\in\mathbf{N}^n$ に対して $U\cap\mathrm{Exp}(p)$ が $\mathrm{Exp}(p)$ の 0 の近傍になることである．これを証明せよ．

次のことを証明せよ．

1. Exp は $\mathrm{Exp}(p)$，$p\in\mathbf{N}^n$ の狭義帰納極限ではない．
2. Exp は完備である．
3. Fourier–Borel 変換は H の強双対 H' から Exp の上への (TVS 構造に関する) 同形写像である．

22.6. H' を $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数の空間とし，$\mathscr{F}: H'\to\mathrm{Exp}$ を Fourier–Borel 変換とする．各整関数 h について

$$\tilde{h}(z)=\overline{h(\bar{z})},\qquad z\in\mathbf{C}^n$$

とおく．このとき $H'\times H'$ 上の準双一次形式

$$(22.14)\qquad (\mu,\nu)\mapsto\langle\mu,\tilde{\mathscr{F}}\nu\rangle$$

により H' は Hausdorff 準 Hilbert 空間になることを示せ．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は H と H' の間の双対性の括弧とする ($\mathrm{Exp}\subseteq H$ を用いる)．エルミート形式 (22.14) に関して H' を完備化して得られる Hilbert 空間を $\widehat{H'}$ で表わす．Fourier–Borel 変換 $\mathscr{F}: H'\to H$ は $\widehat{H'}$ から Hilbert 空間 Λ^2_n (演習問題 22.2 参照) の上への等距離写像に拡張されることを証明せよ．

22.7. 次の二条件は同値であることを示せ．

(a) 級数 $\sum_{p\in\mathbf{N}^n}a_p\delta^{(p)}$ が H' において (たとえば強位相に関して) 収束する (ただし $\delta^{(p)}$ は解析的汎関数

$$h\mapsto(-1)^{|p|}h^{(p)}(0)$$

である)．

(b) $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数 f が存在して，すべての $p\in\mathbf{N}^n$ について $p!a_p=f^{(p)}(0)$ となる．

さらに，写像 $f\mapsto\sum_p 1/p!f^{(p)}(0)\delta^{(p)}$ は Exp から H' の上への (線形構造に関する) 同形写像であることを証明せよ．この同形写像と Fourier–Borel 変換の間にはどんな関係があるか．

22.8. 前問を利用して，H および H' の点列 $\{e_p\}$，$\{e_p'\}$ ($p\in\mathbf{N}^n$)で次の性質をもつものが存在することを示せ．

1. $p=q$ ならば $\langle e_p',e_q\rangle=1$，$p\neq q$ ならば $\langle e_p',e_q\rangle=0$.
2. H の各元 e および H' の各元 e' はそれぞれ一意的な仕方で収束級数の和

$$e=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}a_pe_p,\qquad e'=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}a_p'e_p'$$

と表わされる．

23.

連続線形写像の転置

E, F を二つの TVS とし，u を E から F への連続線形写像とする．y' を F 上の連続線形形式とすれば，y' は F から $\mathbf{C}$ への連続線形写像である．これを図式的に表わせば，

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{y'} \mathbf{C}$$

したがって，合成写像 $y' \circ u$ が考えられる．これは E から $\mathbf{C}$ への連続線形写像，すなわち E 上の連続線形形式である．かくして，結局，F の双対 F' から E の双対 E' への写像

$$y' \mapsto y' \circ u$$

が得られた．この写像を u の**転置** (transpose) といい，この本では常に ${}^t u$ で表わすことにする．

E と E', F と F' の間の双対性を括弧 $\langle\ ,\ \rangle$ で表わすことにすれば[1]，x を E の元とするとき

$$(y' \circ u)(x) = \langle y', u(x) \rangle$$

と書ける．ところで，$y' \circ u$ は定義によって ${}^t u(y')$ であるから，転置の公式

$$\langle y', u(x) \rangle = \langle {}^t u(y'), x \rangle \tag{23.1}$$

を得る．

連続線形写像の転置の概念は，以下で中心的な役割を演ずる．その理由は，適当な条件の下で，写像 u 自身の重要な性質がその転置の性質に移行できるか

1) '双対性' (duality) という表現にとらわれる必要はない．$x' \in E', x \in E$ に対して，$x'(x)$ を $\langle x', x \rangle$ と書くことである．

らである．一例として，次のことに注意して見よう．E, F を局所凸空間とする(したがって Hahn–Banach の定理が使える)．このとき，u の像が稠密であること，すなわち $u(E)$ が F で稠密になるための必要十分条件は，${}^t u : F' \to E'$ が一対一になることであった(定理 18.1 の系 5)．転置の概念が重要であるもう一つの理由は，解析学における基本的な演算(微分，関数を掛けること，合成積による正則化，Fourier 変換など)を，関数空間の双対を考えることによって導入される新しい対称物にまで拡大できるということにある．たとえば，容易にわかるように，あたえられた一つの $\mathcal{C}^\infty$ 関数 ϕ による掛け算は $\mathcal{C}_c^\infty$ から $\mathcal{C}_c^\infty$ 自身への連続線形写像である．したがって，転置することにより，それは超関数の空間 $\mathcal{D}'$ からそれ自身への連続線形写像を定義する．これはまた，関数 ϕ による超関数の乗法の定義とも見ることができる．ここで，もし ϕ を掛けるべき超関数が局所可積分関数 f に等しいときには，容易にわかるように，(転置によって定義される)その積は，普通の積 ϕf に等しい．これは乗法の演算が関数から超関数にまで実際に拡張されたことを意味する．同じような仕方で——少しの変更はあるが——超関数の微分も定義できる．もう一つの重要な例は Fourier 変換である．Fourier 変換が，急減少 $\mathcal{C}^\infty$ 関数の空間 $\mathcal{S}$ (10 章，例 IV 参照)からそれ自身の上への同形写像であることを検証するのは難しくはない．このことから，その転置は，$\mathcal{S}$ の双対 $\mathcal{S}'$ からそれ自身の上への同形写像となる．この転置が $\mathcal{S}'$ における Fourier 変換の定義と見なすことができるのである．他方，$\mathcal{S}'$ は標準的な仕方で超関数の空間，すなわち $\mathcal{D}'$ の線形部分空間と見なすことができる．このようにして，Fourier 変換はあるクラスの超関数にまで拡張されるのである(この定義が古典的な Fourier 変換の理論，たとえば超関数が L^2 関数の場合，のものと一致することも示すことができる)．これらのことは転置の概念の重要性を示す多くの例のうちの幾つかを挙げたに過ぎない．まずこれらについて述べ，さらに転置についてもう少し一般的な考察をした後に，他の例について述べよう．

まず，双対空間上の位相には全く関係しないような幾つかの注意から始めよう．

命題 23.1. $u: E \to F$ を E から F の上への (TVS 構造に関する) 同形写像とすれば，u の転置 ${}^t u: F' \to E'$ は F' から E' の上への (ベクトル空間構造の) 同形写像である．

実際，u の逆写像を v とすると，$v: F \to E$ の転置 ${}^t v$ と ${}^t u$ はたがいに他の逆写像である (すなわち

$${}^t v \circ {}^t u = F' \text{ の恒等写像}, \quad {}^t u \circ {}^t v = E' \text{ の恒等写像}$$

となる)．ところで，写像が (上に述べた意味で) 逆をもつのは，それが一対一で上への写像のときそのときに限るからよい．

命題 23.2. E, F を TVS とし，$u: E \to F$ を連続線形写像とする．このとき次式が成り立つ．

$$\text{Ker}\, {}^t u = (\text{Im}\, u)^0. \tag{23.2}$$

さて，A を一つの TVS の部分集合としたとき，A^0 はその極集合を表わすこと．特に A が線形部分空間であれば，A^0 は A の直交，すなわち A 上で恒等的に 0 となるような連続線形形式の全体のなす集合 (したがって A^0 は双対空間の線形部分空間になる；19 章，定義 19.1 参照) であることを思い出そう．

命題 23.2 の証明は，方程式 (23.1) からただちにできる．実際，$y' \in (\text{Im}\, u)^0$ とすれば，(23.1) の右辺もすべての $x \in E$ について 0 となり，${}^t u(y') = 0$ を得る．逆に，$y' \in \text{Ker}\, {}^t u$ とすれば，左辺もすべての x について 0 となり，これは y' が $\text{Im}\, u$ に直交することを示す．

この命題 23.2 と Hahn–Banach の定理 (定理 18.1) を組合せれば，定理 18.1 の系 5 に述べた結果，すなわち，${}^t u$ が一対一であるための必要十分条件は $\text{Im}\, u$ が F で稠密なこと，を得る．実際，そこでは F を局所凸と仮定するから，局所凸空間の線形部分空間の稠密性の必要十分条件はその直交が $\{0\}$ になること (定理 18.1 の系 1) を用いればよい．

さて，E および F の双対には，19 章で導入した位相のうちのどれかが入っているとしよう．$\mathfrak{S}$ および $\mathfrak{H}$ をそれぞれ E および F の有界集合の族であって，

それぞれその族に属する二つの有界集合の合併はまたその族に属し；Aをその族に属する集合とし，λを複素数としたときには，その族に属する集合Bが存在してλAを含むものとする．実際上は主として，$\mathfrak{S}$および$\mathfrak{H}$がそれぞれEおよびFの，次に述べる四つの有界集合族のうちのどれかである場合に興味がある．すなわち，すべての有界集合からなる族，すべてのコンパクト集合からなる族，すべてのコンパクト凸集合からなる族，すべての有限集合からなる族である．さて，命題19.5に述べたことを思い出そう：

《uをTVS EからTVS Fへの連続線形写像とする．もし任意の$A \in \mathfrak{S}$に対して$B \in \mathfrak{H}$が存在して$B \supseteq u(A)$となるならば，uの転置${}^t u$は$F'_{\mathfrak{H}}$から$E'_{\mathfrak{S}}$の線形写像として連続である.》

命題19.5の後にすでに述べたように，このことからただちに，${}^t u$はF'_σからE'_σへの連続写像であり（弱位相），F'_γからE'_γへの連続写像であり（凸コンパクト収束の位相），F'_cからE'_cへの連続写像であり（コンパクト収束の位相），F'_bからE'_bへの連続写像である（強双対位相）ことがわかる．また，もしF', E'にそれぞれある位相を入れたときに${}^t u$が連続であるならば，F'の位相を強めたりE'の位相を弱めたりしても連続である．

命題 23.3. E, Fがともにノルム空間であれば，${}^t u$のノルムはuのノルムに等しい．

証　明　ノルムはどれも$\| \ \|$で表わすことにしよう．証明すべきことは

$$\begin{aligned}\|{}^t u\| &= \sup_{y' \in F', \|y'\|=1} \|{}^t u(y')\| \\ &= \sup_{y' \in F', \|y'\|=1} \Big(\sup_{x \in E, \|x\|=1} |\langle y', u(x)\rangle| \Big) \\ &= \sup_{x \in E, \|x\|=1} \Big(\sup_{y' \in F', \|y'\|=1} |\langle y', u(x)\rangle| \Big)\end{aligned}$$

が，$\|u\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\|$に等しいことである．ところで，これは，任意の$y \in F$について，$\|y\|$は$|\langle y', y\rangle|$が$F'$の単位球$\{y' ; \|y'\| = 1\}$の上でとる上限に等しいことからただちに従う．ところで$\|y'\|$の定義によって，$|\langle y', y\rangle| \leqslant \|y\|$であるが，他方Hahn-Banachの定理により，yで張られる一次元部分

空間上の連続線形形式 $\lambda y \mapsto \lambda\|y\|$ はノルムを保って（この場合ノルムは1）F 全体の上の連続線形形式 y' に拡張できるから，$y' \in F', \|y'\| = 1$ に対して $\langle y', y\rangle = \|y\|$ が成り立つ．（証終）．

さて，転置写像の幾つかの例を考察してみよう．

例 I. 双対空間の間の単射

ここで，一つの局所凸 Hausdorff 空間 F の双対を，もう一つの局所凸 Hausdorff 空間 E の双対の中に埋め込む手続きについて考察する．ここに述べる仕方は標準的なものであって，今後の議論においても繰り返して幾度も用いられるはずである．この手続きの出発点は，E から F への一つの連続単射 j である．詳しくいえば，E から F への一対一で連続な線形写像 j があたえられたとするのである．さらに，j は**稠密な像** (dense image) をもつとする．すなわち，$j(E)$ は F で稠密であると仮定する．そうすれば，命題 23.2 の後に述べた注意のように，j の転置 ${}^t j : F' \to E'$ は一対一の線形写像となる．さらに，E'，F' に強双対位相（または弱双対位相）を入れたとき，${}^t j$ は連続である．換言すれば，${}^t j$ は F' から E' への連続単射となる．特に，線形構造については，F' を E' の部分ベクトル空間と見なすことができる．

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき，上に述べた状況の非常に重要な例として，次の図式を考えよう（ただし m は整数 >0 とする）．

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) & \to & \mathcal{C}_c^m(\Omega) & \to & \mathcal{C}_c^0(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^\infty(\Omega) & \to & \mathcal{C}^m(\Omega) & \to & \mathcal{C}^0(\Omega) \end{array} \tag{23.3}$$

ここで各空間はそれぞれ‘自然な’位相を持っているとする（一行目は 13 章例 II，二行目は 10 章例 I 参照）．矢印はすべて‘自然な’単射，すなわち一対一で連続な線形写像である．各矢印が稠密な像を持っていることは定理 15.3 の系 1 と 2 からただちにわかる．このことから，矢印の向きをすべて逆にし，空間

をすべてその双対 (たとえば強双対) で置き換えても，連続単射の図式を得ることがわかる.[1] ここで $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ の双対が Ω 上の超関数全体の空間であることを思い出せば，図式 (23.3) に現われる空間の双対はすべて $\mathscr{D}'(\Omega)$ の線形部分空間と見なすことができる．そこで，次の定義を導入する．

定義 23.1. $\mathscr{D}'(\Omega)$ の線形部分空間に，$\mathscr{D}'(\Omega)$ の強双対位相を誘導したものよりも細かい局所凸位相を入れたものを，**Ω 上の超関数の空間** (a space of distributions in Ω) という.[2]

この定義を用いれば，稠密な像をもつ連続単射の図式 (23.3) は，そこに現われる関数空間の双対がすべて Ω 上の超関数の空間と見なせることを示している．これは，自然であり，標準的である．$\mathscr{C}_c^0(\Omega)$ の双対は Ω 上の Radon 測度の空間であった．すでに注意したように (議論の仕方はここに述べたと同様)，Ω 上の Radon 測度は，Ω 上の超関数の特別なものである．その他の空間 ($\mathscr{C}^m(\Omega)$, $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$, $0 \leqslant m \leqslant +\infty$, $0 \leqslant k < \infty$) の双対に属する超関数をもっと '具体的に' 特徴づけることは次章で行なう．

さて，上述と同様のことは

$$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) \to L^p(\Omega) \qquad (1 \leqslant p < +\infty) \tag{23.4}$$

についても成り立つ．この図式で，矢印は自然な単射であり，それは連続であって，定理 15.3 の系 3 により，稠密な像をもっている．ここでは，p が有限であることが本質的である．このようにして，$L^p(\Omega)$ の強双対も Ω 上の超関数の空間になる．そこで次の図式を考えよう．

1) 双対の位相をすべて弱双対位相にしておけば，このようにして得られる矢印もすべて稠密な像をもつ．

2) したがって，Ω 上の超関数の空間はいろいろ考えられる．これを Ω 上の超関数全体の空間 (すなわち $\mathscr{D}'(\Omega)$) と混合してはならない．$\mathscr{D}'(\Omega)$ の任意の線形部分空間に $\mathscr{D}'(\Omega)$ の強双対位相を誘導したものが一つの 'Ω 上の超関数の空間' になるのだから，この定義は格別の意味をもたない．

$$\begin{array}{ccc} (L^p(\Omega))' & \xrightarrow{\ u\ } & \\ {\scriptstyle w}\uparrow & & \mathscr{D}'(\Omega) \\ L^{p'}(\Omega) & \xrightarrow{\ v\ } & \end{array} \tag{23.5}$$

この図式において，u は写像 (23.4) の転置，p' は p の共役指数 (すなわち，$p=1$ なら $p'=\infty, p>1$ なら $p'=p/(p-1)$), w は $L^{p'}(\Omega)$ から $L^p(\Omega)$ の双対の上への標準的等距離写像 (定理 20.3), v は $L^{p'}(\Omega)$ の元を局所可積分関数 (の同値類) とみなして $\mathscr{D}'(\Omega)$ に埋め込む写像である．この最後に述べたことの意味は，f をそのような関数とするとき，v は f に対して超関数

$$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int \varphi(x) f(x) dx$$

を対応させるということである．w の定義 (定理 20.3) から，三角形 (23.5) は可換な図式である，このことは次のようにもいい換えることができる．$L^{p'}(\Omega)$ の元を超関数と同一視する二つの方法は一致するということである．すなわち，局所可積分関数と見なして超関数と同一視する方法と，$L^p(\Omega)$ 上の連続線形汎関数と見なす伝統的方法が一致するということである．

要約すれば，次のようにいうことができる．図式 (23.3) の各空間および $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ をすべて Ω 上の局所可積分関数の空間に埋め込むことによって，それらを Ω 上の超関数の空間と見なすことができる．さらに，$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ からそれらの空間への自然な単射を転置することによって，それらの空間の双対空間も，(注目すべき) 例外 $L^\infty(\Omega)$ 以外の場合には，Ω 上の超関数の空間と見なすことができる．他方，空間 $\mathscr{C}_c^m(\Omega), L^{p'}(\Omega), 0 \leqslant m \leqslant +\infty, 1 < p' \leqslant +\infty$ は，すでに述べたものに含まれたり，双対と考えられたりするから，上述の二つの方法によって，$\mathscr{D}'(\Omega)$ に埋め込むことができる．図式 (23.5) について述べたことは，この二つの埋め込み方が一致するということである．この事実は簡単なことではあるが，認識しておくことは重要である．

さて今度は，Ω を $\mathbf{C}^n$ の開集合とする．このとき，Ω 上のテスト関数の空間 $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ を考えることができる．それは，$\mathbf{C}^n$ と $\mathbf{R}^{2n}$ とを標準的な仕方で同一視して，Ω を $\mathbf{R}^{2n}$ の開集合と見なして考えたものである．Ω における正則関数全

体のなす空間 $H(\Omega)$ と $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ との共通部分は恒等的に 0 になる関数だけであることに注意しよう．したがって $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ を $H(\Omega)$ 内に自然な単射で埋め込んで稠密な像をもつようにできるような事情は存在しない．このことから，$H(\Omega)$ の双対，すなわち Ω 上の解析的汎関数の空間 $H'(\Omega)$ を Ω 上の超関数の空間と同一致することは，少なくとも上に述べたような方法では不可能であることがわかる（もちろん，別に他の良い方法があるわけでもない）．

例 II. 制限と拡張

Ω, Ω' を $\mathbf{R}^n$ の二つの開集合とし，$\Omega \subseteq \Omega'$ としよう．f を Ω 上で定義された関数であって，Ω においてコンパクトな台をもつとする．このとき f の Ω' への**自明な拡張** (trivial extension) とは，Ω においては f に等しく，Ω' における Ω の補集合においては 0 に等しいとして定義される Ω' 上の関数のことをいう．

この Ω' への自明な拡張は，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$ への一つの連続線形写像 j を定義する．この写像の転置は $\mathcal{D}'(\Omega')$ から $\mathcal{D}'(\Omega)$ への（たとえば，強双対位相に関する）連続線形写像となる．この写像を，Ω' 上の超関数の Ω への**制限写像**（または**制限**）(restriction) という．これは明らかに次のような意味をもっている．T を Ω' 上の超関数としたとき，それを Ω に台をもつテスト関数 φ に作用させるならば，$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ は Ω 上の一つの超関数を定義する．これが丁度，T の Ω への制限になっている．

いま，$\Omega \neq \Omega'$ とすれば，次のことが成り立つ．

(1) 自明な拡張による $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の像は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$ において稠密にならない．

(2) 自明な拡張は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$ への同形写像にはならない．すなわち，それは明らかに一対一かつ連続ではあるが，その逆写像（像の上へ定義されたもの）は連続でない．換言すれば，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ の位相は，（拡張写像を通じて）$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega')$ から誘導される位相よりも真に細かいのである．

この二つの命題の証明は，読者の演習問題としておこう．

これらの二つの命題は，写像を転置することによって，次のようになる．

(1′)　$\mathscr{D}'(\Omega')$ から $\mathscr{D}'(\Omega)$ への制限写像は一対一ではない．

(2′)　$\mathscr{D}'(\Omega')$ から $\mathscr{D}'(\Omega)$ への制限写像は上への写像ではない．

(1′) についていえば，Ω に台をもつ (拡張された) テスト関数のすべてに直交する超関数 [$\in \mathscr{D}'(\Omega')$] の Ω への制限は 0 であることに注意するとよい[1]．(1) によって，Hahn-Banach の定理から，そのような超関数 [$\in \mathscr{D}'(\Omega')$] はたしかに存在する (具体的な例としては，一点 $x^0 \in \Omega', x^0 \notin \Omega$ をとって，Dirac 測度

$$\mathscr{C}_c^\infty(\Omega') \ni \varphi \mapsto \varphi(x^0)$$

を考えるとよい)．

(2′) の証明はもっと複雑になるが，ここでは述べない．[2] しかし，上の二つの事実を読者は心に留めておくことが大切である．

定義 23.2. Ω 上の一つの超関数が Ω' にまで**拡張可能** (extendable) であるとは，それが Ω' 上の一つの超関数の Ω への制限に等しいことをいう．単に拡張可能というときは，それが $\mathbf{R}^n$ 全体に拡張可能であることを意味する．

Ω の境界が十分滑らかな場合には，Ω 上の超関数のうちで拡張可能なものを特徴ずけることもできる．

$\mathscr{C}_c^\infty$ に関する上述の考察は，$\mathscr{C}_c^m, L_c^p (0 \leqslant m \leqslant +\infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ およびその双対についても同様に行なうことができる．

Ω, Ω' は前の通りとして，$\mathscr{C}^\infty(\Omega')$ を考えよう．Ω' 上の関数を Ω 上に制限する [Ω 上に制限して考える] ということの意味は明瞭である．この制限は $\mathscr{C}^\infty(\Omega')$ から $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ への連続線形写像を定義する．$\Omega = \Omega'$ の場合を除けば，この制限写像は一対一でもなければ上への写像でもない．[3] 実際 $\Omega \neq \Omega'$ ならば，恒等

1)　Ω への制限が 0 であるような $\mathscr{D}'(\Omega')$ の元はここに述べたようなものに限る．

2)　具体例を挙げるならば，一次元で考えて，$\Omega = \mathbf{R}^1 - \{0\}, \Omega' = \mathbf{R}^1$ として，21 章の最後の例の関数 $\mathbf{R}^1 - \{0\} \ni t \mapsto e^{1/t}$ を考えるとよい．

3)　制限が上への写像でないことをいうには，Ω' が連結であることを仮定せねばならない．

的には0でないΩ'上の$\mathcal{C}^\infty$関数，たとえば，$\mathcal{C}_c^\infty$関数φであって，その台がΩ'におけるΩの閉包の補集合に含まれるものをとれば，φのΩへの制限は恒等的に0になる．また，Ω上の$\mathcal{C}^\infty$関数であって，Ω'上の$\mathcal{C}^\infty$関数のΩへの制限にはならないものを作ることも容易である．たとえば，x^0をΩ'の点であってΩの境界に属するとして[1]，関数$|x-x^0|^{-1}$のΩへの制限を考えればよい．

さて，$\mathcal{C}^\infty(\Omega')$は，その線形部分空間として，$\Omega$に台が含まれるような($\Omega'$で定義された)$\mathcal{C}_c^\infty$関数全体の集合を含む．このような$\mathcal{C}_c^\infty$関数を$\Omega$に制限しても，$\Omega$上の関数としては全く同じものが得られる．このことを，Ωへの制限は$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$のそれ自身への恒等写像を誘導するといってもよい．このことから，制限写像による$\mathcal{C}^\infty(\Omega')$の像が$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$で稠密であることがわかる．なぜなら，像は$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$を含んでいるからである．したがって，制限写像の転置は$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$の双対から$\mathcal{C}^\infty(\Omega')$の双対への連続単射となる．例Iで述べたように，前者はΩ上の超関数の空間であり，後者はΩ'上の超関数の空間である．このようにして，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$の双対に属するような$\Omega$上の超関数の$\Omega'$への一種の拡張写像が得られたことになる．次章において，この写像が実際に拡張写像と見なすことができることとそれが$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$に属する関数の自明な拡張に非常に似たものであることを述べる．

例III. 微分作用素

前と同様に，Ωは$\mathbf{R}^n$の開集合とする．Ω上の**微分作用素**(differential operator)とは，ここでは$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$からそれ自身への一つの線形写像であって，次の形をしているものをいう

$$\varphi \mapsto \sum a_p(x)(\partial/\partial x)^p\varphi \tag{23.6}$$

ここで，和はn-系$p=(p_1,\dots,p_n)$の一つの有限集合の上にわたるものとし，各pに対して係数a_pはΩ上で定義された複素数値$\mathcal{C}^\infty$関数を表すものとし，$(\partial/\partial x)^p$

1) 前頁脚注3)参照．Ω'が連結ならば，このような点x^0が存在する．

はいつも通りに微分単項式 $(\partial/\partial x_1)^{p_1}\cdots(\partial/\partial x_n)^{p_n}$ を表わすとする．解析学では係数 a_p が $\mathcal{E}^\infty$ であるという条件を相当にゆるめた微分作用素をも扱う．たとえば，係数は単に L^∞ であるような場合も考察することがある．このような一層広いクラスの微分作用素とここに述べたようなものを区別するために，後者を $\mathcal{E}^\infty$ 係数の微分作用素と呼ぶべきであろうが，ここでは $\mathcal{E}^\infty$ 係数の場合しか扱わないので，単に微分作用素とよんでも混乱のおそれはない．したがって，微分作用素は常に $\mathcal{E}^\infty$ 係数のものを意味するとしておく．そして

(23.7) $$P(x, \partial/\partial x) = \sum a_p(x)(\partial/\partial x)^p$$

とおく．この記法によれば，写像 (23.6) は $\varphi \mapsto P(x, \partial/\partial x)\varphi$ と書くことができる．(23.7) において p に関する和は，すでに述べたように，有限和である．したがって，次の性質をみたすような最小の整数 $m \geqslant 0$ が存在する．すなわち，$|p| = p_1 + \cdots + p_n > m$ となるすべての n 系 p に対して $a_p(x) \equiv 0$．m の最小性から，$|p| = m$ なる n-系 p が存在して，a_p は恒等的には 0 ではない．この整数 m のことを微分作用素 $P(x, \partial/\partial x)$ の**階数** (order) という．

次の命題は自明であろう．

命題 23.4. $P(x, \partial/\partial x)$ を Ω における微分作用素とすれば，写像

$$\varphi \mapsto P(x, \partial/\partial x)\varphi$$

は，$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ (あるいは $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$) からそれ自身への連続線形写像である．

演習問題． $\mathcal{E}_c^m(\Omega)$ $(0 < m \leqslant +\infty)$ の LF-位相は，階数が $< m+1$ であるすべての (Ω 上の) 微分作用素が $\mathcal{E}_c^m(\Omega)$ から $\mathcal{E}_c^0(\Omega)$ への連続線形写像となるような局所凸位相のうちで最も弱いものであることを証明せよ[1]．

命題 23.4 によって，写像 $\varphi \mapsto P(x, \partial/\partial x)\varphi$ の転置を考えることができる．この転置写像は $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ の双対 (あるいは $\mathcal{D}'(\Omega)$) からそれ自身への連続線形写像である．さて，$\mathcal{D}'(\Omega)$ の場合を考察して見よう．$\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ に属する関数はもちろ

1) ただし $\mathcal{E}_c^0(\Omega)$ には普通の LF-位相が入っているとする．

ん Ω 上局所可積分だから，Ω 上の超関数を定義する．すなわち，$\psi\in\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ は超関数

$$\varphi\mapsto\int\varphi(x)\psi(x)\,dx$$

を定義する．ψ を Ω 上の超関数と見て $P(x,\partial/\partial x)$ の転置を作用させた結果を見てみよう．等式 (23.1) から，

$$\begin{aligned}\langle{}^tP(x,\partial/\partial x)\psi,\varphi\rangle&=\int\psi(x)P(x,\partial/\partial x)\varphi(x)\,dx\\&=\sum_p\int a_p(x)[(\partial/\partial x)^p\varphi(x)]\psi(x)\,dx\end{aligned}$$

この各項の積分

$$\int a_p(x)[(\partial/\partial x)^p\varphi(x)]\psi(x)\,dx$$

を考えて見よう．部分積分を行なえば，φ の台が開集合 Ω に含まれていることから，境界の積分は表われてこないことに注意しよう．したがって，これは，

$$\int\varphi(x)(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p[a_p(x)\psi(x)]\,dx$$

に等しい．このようにして，次式を得る．

$$(23.8)\qquad\langle{}^tP(x,\partial/\partial x)\psi,\varphi\rangle=\left\langle\sum_p(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p[a_p(x)\psi],\varphi\right\rangle.$$

この結果は次のようにいうことができる．関数 $\psi\in\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ を Ω 上の超関数と考えて，これに $\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ からそれ自身への連続線形写像 $\varphi\mapsto P(x,\partial/\partial x)\varphi$ の転置写像を作用された結果は，関数

$$\sum_p(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p[a_p(x)\psi]$$

によって定義される超関数に等しい．さて，ψ を関数と考えれば，

$$\psi\mapsto\sum_p(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p[a_p(x)\psi]$$

は Ω における一つの微分作用素である．実際，Leibniz の公式を用いれば，これを普通の形に直すことができる．それには

$$(23.9)\qquad(\partial/\partial x)^p(a_p\psi)=\sum_{q\le p}\binom{p}{q}[(\partial/\partial x)^{p-q}a_p](\partial/\partial x)^q\psi$$

に注意すればよい. この和において $q \leqslant p$ とは, 和が $q_1 \leqslant p_1, \dots, q_n \leqslant p_n$ であるようなすべての n-系 $q=(q_1,\dots,q_n)$ にわたることを意味する. また, 記号 $\binom{p}{q}$ は

$$\binom{p_1}{q_1}\cdots\binom{p_n}{q_n}, \quad \binom{p_j}{q_j}=p_j!/[(p_j-q_j)!\,q_j!] \tag{23.10}$$

を意味する. (23.9) を用いれば,

$$\sum_p (-1)^p(\partial/\partial x)^p[a_p(x)\phi]=\sum_p b_p(x)(\partial/\partial x)^p\phi.$$

ただし,

$$b_p(x)=\sum_{r\geq p}(-1)^{|r|}\binom{r}{p}(\partial/\partial x)^{r-p}a_r(x). \tag{23.11}$$

である.

定義 23.3. 公式 (23.11)であたえられた b_p を係数とする微分作用素 $\sum_p b_p(x)(\partial/\partial x)^p$ を, 微分作用素 $\sum_p a_p(x)(\partial/\partial x)^p$ の**形式的転置** (formal transpose) とよぶ.

そこで, $P(x,\partial/\partial x)$ の形式的転置を, 仮に $\check{P}(x,\partial/\partial x)$ と書くことにすれば, 等式 (23.8) は, 次のように表わされる.

$$\langle {}^tP(x,\partial/\partial x)\phi,\varphi\rangle=\langle\phi,P(x,\partial/\partial x)\varphi\rangle=\langle\check{P}(x,\partial/\partial x)\phi,\varphi\rangle.$$

このことから, 今後は次の記法を系統的に用いる.

記号 23.1. $P(x,\partial/\partial x)$ の形式的転置を ${}^tP(x,\partial/\partial x)$ で表わす[1].

${}^{tt}P(x,\partial/\partial x)=P(x,\partial/\partial x)$ に注意すれば,

$$\langle P(x,\partial/\partial x)\phi,\varphi\rangle=\langle\phi,{}^tP(x,\partial/\partial x)\varphi\rangle. \tag{23.12}$$

このことから, 次の定義の意味は明らかであろう.

定義 23.4. $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ からそれ自身への連続線形写像

1) 丁寧に書けば, ${}^t[P(x,\partial/\partial x)]={}^tP(x,\partial/\partial x)$.

$$\varphi \mapsto {}^tP(x, \partial/\partial x)\varphi$$

(ここで ${}^tP(x, \partial/\partial x)$ は $P(x, \partial/\partial x)$ の形式的転置) の転置写像は，超関数の空間 $\mathcal{D}'(\Omega)$ からそれ自身への連続写像であるが，それを

$$T \mapsto P(x, \partial/\partial x)T$$

と表わす．この写像を [空間 $\mathcal{D}'(\Omega)$ における] 微分作用素とよび，$P(x, \partial/\partial x)$ で示す．

等式 (23.12) の示すところは，超関数 T が $\mathcal{C}^\infty$ 関数 ϕ によって定義されているとき，超関数 $P(x, \partial/\partial x)T$ は $\mathcal{C}^\infty$ 関数 $P(x, \partial/\partial x)\phi$ によって定義されるということである．(後者は古典的な意味での微分作用素である.) すなわち，微分作用素を超関数の意味で $\mathcal{C}^\infty$ 関数に作用させても，普通の意味で作用させたものと同じになるということを意味している．さらに言い換えれば，上の定義に従って超関数に作用する微分作用素 $P(x, \partial/\partial x)$ は，$\mathcal{C}^\infty$ 関数に普通の意味で作用する $P(x, \partial/\partial x)$ の拡張になっている．

注意すべき二つの特別の場合として

(1) 階数 0 の微分作用素

まず $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に作用するときには，階数 0 の微分作用素とは，テスト関数に一つの関数 $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ を掛けることに他ならない．すなわち，それは $\varphi \mapsto \alpha\varphi$ という写像になる．その形式的転置も同じ写像になる．したがって，定義 23.4 により，αT は次の公式

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle \tag{23.13}$$

によって定義される．この等式 (23.13) は，Ω 上の超関数 T と Ω 上の $\mathcal{C}^\infty$ 関数 α との乗法の定義と解釈することができる．$T \mapsto \alpha T$ は $\mathcal{D}'(\Omega)$ からそれ自身への連続線形写像である．T が $\mathcal{C}^\infty$ 関数のときには，αT は普通の意味の積である $\mathcal{C}^\infty$ 関数に等しい．

(2) 定数係数の微分作用素

これは微分単項式 $(\partial/\partial x)^p$ の複素数係数の有限一次結合のことである．このような作用素には $P(\partial/\partial x)$ のような記号を用いる．すなわち

$$P(\partial/\partial x)=\sum_{|p|<m}a_p(\partial/\partial x)^p,\qquad a_p：複素数.$$

ここで m は $P(\partial/\partial x)$ の階数を示す．すなわち，m は $|p|\geqslant m$ ならば $a_p=0$ となるような最小の整数を表わす． 作用素 $P(\partial/\partial x)$ に n 個の文字 $X_1,\dots,X_n$ に関する複素係数の m 次の多項式

$$P(X)=\sum_{|p|<m}a_pX^p$$

(ここで， 記法 $X^p=X_1^{p_1},\cdots X_n^{p}$ を用いた) を対応させることができる．逆に，n 変数 $X_1,\dots,X_n$ の任意の多項式 $P(X)$ に，X_j を $\partial/\partial x_j$ $(j=1,\dots,n)$ で置き換えることによつて，微分作用素 $P(\partial/\partial x)$ を対応させることができる．

$P(\partial/\partial x)$ の形式的転置はどうなるか？ 簡単な計算によって， それは微分作用素 $P(-\partial/\partial x)$ に等しいことがただちにわかる．したがって，微分作用素 $P(\partial/\partial x)$ を超関数の範囲にまで拡張するには，公式

$$\langle P(\partial/\partial x)T,\varphi\rangle=\langle T,P(-\partial/\partial x)\varphi\rangle$$

を用いればよい． たとえば， $P(\partial/\partial x)$ が一つの偏微分 $\partial/\partial x_j$ であるときには $(1\leqslant j\leqslant n)$,

$$\langle\partial T/\partial x_j,\varphi\rangle=-\langle T,\partial/\partial x_j\varphi\rangle$$

となる．

演 習 問 題

23.1　n 変数の複素係数の多項式の空間および形式的巾級数の空間にそれぞれ LF-位相および Fréchet 位相を入れたものを $\mathcal{P}_n,\mathcal{Q}_n$ で表わすことにする．これらの空間は次の括弧式によって，たがいに他の双対と見なすことができる．

$$\langle P,u\rangle=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{p!}P^{(p)}(0)u_p.$$

ただし，$u=\sum_{p\in\mathbf{N}^n}u_pX^p\in\mathcal{Q}_n$，$P\in\mathcal{P}_n$ である．いま Q を $\mathcal{P}_n$ に属する任意の多項式とする．このとき，$\mathcal{Q}_n$ (あるいは $\mathcal{P}_n$) からそれ自身への (連続線形) 写像

(24.14)　$$f\mapsto Q(\partial/\partial X)f$$

の転置写像は何であるか．

演習問題 2, 3 を用いて，$Q=0$ のとき以外は， 写像 (23.14) は $\mathcal{P}_n$ からそれ自身の上への写像であることを証明せよ． このことは Q を形式的巾級数としても正しいことを証

明せよ.

23.2. Fourier–Borel 変換を $\mathscr{F}: H' \to \mathrm{Exp}$ としよう (定義 22.3 : H' : $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数の空間, Exp : $\mathbf{C}^n$ 上の指数型整関数の空間). 線形写像 $u: H' \to H'$ に対して, $\hat{u} = \mathscr{F} \circ u \circ \mathscr{F}^{-1}$ とおく. Pをn変数の複素係数多項式として, $\mathbf{C}^n$ における微分作用素 $P(\partial/\partial z)$ を考える. すなわち,

$$H \ni h \mapsto (z \mapsto P(\partial/\partial z)h(z)), \qquad P(\partial/\partial z) = P(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n).$$

いま, $u: H' \to H'$ を $P(\partial/\partial z)$ の転置写像としたとき, $\hat{u}$ は何か?

23.3. Eを Hilbert 空間とし, $(\,|\,)_E$ をEにおける内積とする. Fをもう一つの Hilbert 空間とし, その内積を $(\,|\,)_F$ で表わす. 転置写像の定義と Hilbert 空間からその反双対の上への標準的等距離写像を用いて, 任意の連続線形写像 $u: E \to F$ に対して, 次の性質をもつFからEの連続写像 (それを u^* と書き, u の共役 (adjoint) とよぶ) が一意的に存在することを示せ.

$$(u(x)|\,y)_F = (x|\,u^*(y))_E, \qquad \forall\, x \in E, \ \ \forall\, y \in F.$$

またこのとき, 写像 $u \mapsto u^*$ は $L(E, F)$ から $L(F, E)$ の上への反線形等距離写像となることを示せ ($L(E, F)$, $L(F, E)$ ともに作用素のノルムを入れて考える ; 反線形とは $(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$ となること).

23.4. $P \in \mathbf{N}^n$ に対して, $\delta^{(p)}$ を $\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数

$$h \mapsto (-1)^{|p|} h^{(p)}(0)$$

とする. Pをn変数の複素係数多項式

$$P(X) = \sum_p c_p X^p$$

として,

$$P(\partial/\partial z)\delta^{(q)} = \sum_p c_p \delta^{(p+q)}$$

とおく. 演習問題 22.7 で導入した解析的汎関数の表現を用いて, $P(\partial/\partial z)$ を H' 全体の上に拡張する. 他方, $P(\partial/\partial z)$ は整関数には普通の仕方で作用するから, それはHからそれ自身への連続線形写像を定義する. このとき, 写像

$$P(\partial/\partial z) : H \to H$$

の転置は

$$P(-\partial/\partial z) : H' \to H'$$

に等しいことを証明せよ.

23.5. 普通の関数の乗法 $(f, g) \mapsto fg$ は $H \times H$ からHへの連続双線形写像であることを用いて, $(f, \mu) \mapsto f\mu$ は $H \times H'$ から H' への分離連続な双線形写像になることを証明せよ. いま, 解析的汎関数が表現

$$\mu = \sum_{p \in \mathbf{N}^n} a_p \delta^{(p)}$$

によってあたえられたとすれば（演習問題 22.7 参照），$f\mu$ を表現する級数は何になるか．

23.6. $m=1,2,\ldots$ に対して，

$$\phi \mapsto \frac{1}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{(m)}(t)\log|t|\,dt$$

は実数直線上の超関数であって，$\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上の（局所 L^1）関数 t^{-n} によって定義される $\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上の超関数の拡張になっていることを証明せよ．

24.

超関数の台と構造

Ωを$\mathbf{R}^n$の開集合とする．

定義 24.1. Ω上の一つの超関数Tが，Ωの開部分集合U上で0に等しいとは，台がUに含まれるすべての$\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$に対して$\langle T, \varphi \rangle = 0$となることをいう．

前章で導入した用語(23章例II)を用いるならば．$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$が$U$で0になる，あるいは$U$上で0に等しいとは，$T$の$U$への制限が0超関数になるということである．定義24.1のような定義を導入するときには，例によって，これが関数に対する用語と合致することを検証しておかねばならない．今の場合に検証すべきことは，fをΩ上の局所可積分関数としたとき，fが超関数としてU上で0になるならば，fは関数としてもU上で0になることである．これは，超関数の理論の枠内で考えれば，fがU上ほとんどいたるところ0に等しいということをいう．ところで，これは定理21.3の直接の帰結であった．

次の定理は，超関数の非常に重要な性質を表わしている．

定理 24.1. $\{U_i\}(i \in I)$を$\mathbf{R}^n$の開集合の族とする．各添字$i \in I$に対してT_iをU_i上の超関数であって，任意の二つの添字$i, j \in I$についてT_iおよびT_jの$U_i \cap U_j$への制限が一致すると仮定する．このとき，U_iの合併集合U上の超関数Tであって，その各U_iへの制限がT_iに一致するものが一意的に存在する．

証明には $\mathcal{E}^\infty$ の範囲での１の分割の存在 (16章参照) を用いる．まず，定理16.1により，$U=\bigcup_{i\in I}U_i$ の開被覆 $\{V_j\}(j\in J)$ であって，被覆 $\{U_i\}(i\in I)$ よりも細かく，かつ局所有限なものが存在する．次に，定理16.3により，被覆 $\{V_j\}(j\in J)$ に従属するような $\mathcal{E}^\infty(U)$ における１の分割 $\{g_j\}(j\in J)$ が存在する．そこでいま $\phi\in\mathcal{E}_c^\infty(U)$ とすれば，

$$\phi=\sum_{j\in J}g_j\phi$$

が成り立つ．ここで $g_j\phi$ は有限個を除いて恒等的に０に等しい．定理に述べたような T の存在を証明するためには，

$$\langle T,\phi\rangle=\sum_{j\in J}\langle T_{i(j)},g_j\phi\rangle$$

とおいて見るとよい．ここで $i(j)$ は I に属する添字で $V_j\subseteq U_{i(j)}$ となるものの一つとする (そのような添字の存在することは，被覆 $\{V_j\}$ が被覆 $\{U_i\}$ よりも細かいことによる)．さて j に対する添字 $i(j)$ の選び方は，$V_j\subseteq U_{i(j)}$ である限り何等の差がないことに注意しよう．実際，$V_j\subseteq U_i\cap U_i'$ であれば，定理の仮定によって，$\langle T_i,g_j\phi\rangle=\langle T_{i'},g_j\phi\rangle$ となるからである．同じ仮定から $\langle T,\phi\rangle$ の定義の正当性，すなわち，この定義が被覆 $\{V_j\}$ や１の分割 $\{g_j\}$ の選び方に無関係であることがわかる．実際，他の被覆 $\{W_k\}$ (開，局所有限，$\{U_i\}$ より細かい) とそれに従属する $\mathcal{E}^\infty(U)$ における一つの１の分割 $\{h_k\}$ をあたえたとき，各 k に対して添字 $i(k)\in I$ を $W_k\subseteq U_{i(k)}$ となるようにえらぶならば

$$\begin{aligned}\sum_j\langle T_{i(j)},g_j\phi\rangle&=\sum_{j,k}\langle T_{i(j)},g_jh_k\phi\rangle\\&=\sum_{j,k}\langle T_{i(k)},g_jh_k\phi\rangle=\sum_k\langle T_{i(k)},\sum_j g_jh_k\phi\rangle\\&=\sum_k\langle T_{i(k)},h_k\phi\rangle,\end{aligned}$$

となるからである．さて，ϕ がある $\mathcal{E}_c^\infty(K)(K$:コンパクト $\subseteq U)$ において０に収束すると仮定しよう．すると，K だけに関係する J の有限部分集合 J' が存在して，$j\notin J'$ ならば $g_j\phi=0$ となる．さらに，$j\in J'$ のとき $\mathcal{E}_c^\infty(U_{i(j)})$ において $g_j\phi\to0$ となるから，$\langle T_{i(j)},g_j\phi\rangle\to0$．これは $\mathcal{E}_c^\infty(U)$ の線形汎関数 $\phi\mapsto\langle T,\phi\rangle$ の連続性を示している (命題13.1とその系参照)．このようにして，上に

定義した T はたしかに U 上の超関数であることがわかった.

次に, ϕ の台が U_i に含まれているときには, $g_j\phi$ の台は $V_j\cap U_i\subseteq U_{i(j)}\cap U_i$ に含まれるから,

$$\langle T_{i(j)}, g_j\phi\rangle=\langle T_i, g_j\phi\rangle$$

が成り立つ. したがって, $\langle T,\phi\rangle=\langle T_i,\sum_j g_j\phi\rangle=\langle T_i,\phi\rangle$. すなわち, T の U_i への制限は T_i に等しい.

最後に T の一意性を示そう. T' を U 上のもう一つの超関数であって, その各 U_i への制限が T_i に等しいものとする. すると, その差 $T-T'$ の各 U_i の制限は 0 に等しい. したがって, T の一意性は次に述べる結果から従う. これはまた, 定理 24.1 の系とも見なすことができる.

系 1. 開集合族 $\{U_i\}(i\in I)$ の合併集合上で定義された超関数 T が各 U_i の上で 0 になるならば, T はその合併集合上で 0 に等しい.

定理の証明の始めの部分で述べたのと同じ $\{U_i\}$ の細分 $\{V_j\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{g_j\}$ を用いる. 任意の $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(U)$ に対して, 有限個の j を除いては $g_j\phi=0$ となるから, 線形性によって

$$\langle T,\phi\rangle=\sum_{j\in J}\langle T, g_j\phi\rangle.$$

ところが, $\mathrm{supp}(g_j\phi)\subseteq V_j\subseteq U_i$ となるような i が存在するから, $\langle T, g_j\phi\rangle=0$, これはすべての j について成り立つから, これで定理の証明が完成する.

系 2. Ω 上の超関数 T が 0 となるような Ω の開部分集合全体の合併集合は, また T が 0 となるような Ω の開部分集合である.

定義 24.2. T を Ω の超関数とする. T が 0 となるような Ω の最大の開部分集合の補集合を, T の**台** (support) といい

$$\mathrm{supp}\,T$$

によって示す.

定義 24.2 において，補集合とは Ω に関する補集合をいう．したがって，supp T は Ω の相対的閉集合であって，$\mathbf{R}^n$ の閉集合とは限らない．もちろん，ここで，定理 24.1 の系 2 に述べた事実，すなわち，T が 0 となるような Ω の最大の開集合が存在することを用いている．これは，この最大の開集合が空集合にならないということを主張しているのではない [ことに注意しておこう]．f が Ω 上の局所可積分関数のときには，超関数の意味での f の台とは，その補集合において f がほとんどいたるところ 0 になるような最小の (Ω の) 閉集合のことである．f が連続なときには，容易にわかるように，関数としての台の概念 (f が 0 にならないような点全体の閉包) と超関数としての台の概念とは一致する．Ω の一点 x_0 における Dirac 測度 δ_{x_0} の台は集合 $\{x_0\}$ になる．

23 章例 I で述べた議論によれば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の相対は $\mathcal{D}'(\Omega)$ の線形部分空間と標準的な同一視ができた．その同一視は，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ への標準的単射の転置によることができて，この単射は稠密な像をもつ．ところで，超関数の台の概念を用いれば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の双対に属するような超関数の非常に簡明な特徴づけをあたえることができる．それを述べる前に，次の標準的な記法を導入しておく．

記号 24.1. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の双対 (Ω 上の一つの超関数の空間とみなしたもの) を $\mathcal{E}'(\Omega)$ によって表わす．

定理 24.2. $\mathcal{E}'(\Omega)$ に属する超関数は，Ω においてコンパクトな台をもつ超関数であり，逆も成り立つ．

定理 24.2 の証明の基礎になるのは，明白な事実：《超関数 T が $\mathcal{E}'(\Omega)$ に属するための必要十分条件は，線形形式 $\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle$ が $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ からの誘導位相を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に入れたときに連続になること》である．実際，この線形形式が誘導位相に関して連続ならば，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 全体に一意的に拡張ができる．逆の方の証明は自明である．

定理 24.2 の証明 T を $\mathcal{E}'(\Omega)$ に属する超関数としよう．$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の位相の定義によって，Ω のコンパクト集合 K と整数 $m \geqslant 0$，定数 $C > 0$ が存在して，Ω におけるすべてのテスト関数 ϕ に対して

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C \sup_{|p| \leq m}(\sup_{x \in K}|(\partial/\partial x)^p \phi(x)|)$$

が成り立つ．このことからただちに，ϕ の台が K の補集合に含まれる限り，$\langle T, \phi\rangle = 0$ を得る．これは，$\operatorname{supp} T \subseteq K$ を意味している．

さて，今度は，T をその台が Ω に含まれるコンパクト集合になるような超関数とし，その台を K としよう．$\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ を K のある近傍で 1 に等しい関数とする．このような関数は，定理 16.4 によって，たしかに存在する．このとき，Ω におけるすべてのテスト関数 ϕ について

$$\langle T, \phi\rangle = \langle T, \alpha\phi\rangle$$

が成り立つ．なぜなら，$(1-\alpha)\phi$ の台は $\operatorname{supp} T$ の補集合に含まれるからである．ところで，関数 $\alpha\phi$ の台は，ϕ に無関数な（Ω の）一定のコンパクト集合 $\operatorname{supp}\alpha$ に含まれており，$\mathcal{C}_c^\infty(\operatorname{supp}\alpha)$ に $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ および $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から誘導した位相は一致するから，ϕ が $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ において 0 に収束するならば，$\alpha\phi$ は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ において 0 に収束する．このことは，線形形式 $\phi \mapsto \langle T, \phi\rangle$ は $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ において，$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ からの誘導位相に関して連続になることを示している．すなわち，$T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.（証終）.

さて，$\mathcal{E}'(\Omega)$ に属する元全体が $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ の双対であることを知ったから，制限写像

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega') \to \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \Omega \subseteq \Omega' (23\text{ 章例 II})$$

の転置写像の意味も簡明に解釈できる．それは，拡張写像

$$\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega')$$

に他ならない．すなわち，Ω にコンパクトな台をもつ超関数に，Ω' 上の超関数であって，Ω 上では T に等しく，$\operatorname{supp}T$ の Ω' に関する補集合では 0 に等しいものを対応させる写像である．この拡張写像は，T が $\mathcal{C}_c^\infty$ 関数のときには，前に述べた自明な拡張写像（301 頁参照）と一致する．

演 習 問 題

24.1. Ω 上の任意の超関数 S, T と任意の複素数 $\lambda\neq 0$ に対して

$$\mathrm{supp}(S+T)\subseteq \mathrm{supp}\,S+\mathrm{supp}\,T$$

$$\mathrm{supp}(\lambda T)=\mathrm{supp}\,T$$

となることを証明せよ. (このことから, 台が一定の集合 $A\subseteq\Omega$ に含まれる超関数全体は $\mathcal{D}'(\Omega)$ の部分ベクトル空間となすことがわかる).

24.2. Ω の部分集合 A があたえられたとき, 台が A に含まれるような超関数全体のなす $\mathcal{D}'(\Omega)$ の部分ベクトル空間が弱閉 (弱位相に関して閉集合) となるための必要十分条件は, A が Ω における閉集合になることである. このことを証明せよ.

24.3. $P(x, \partial/\partial x)$ を Ω 上の微分作用素とする. このとき, すべての超関数 $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ について

$$\mathrm{supp}\,P(x,\partial/\partial x)T\subseteq \mathrm{supp}\,T$$

となることを証明せよ. また, すべての $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ とすべての $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ について

$$\mathrm{supp}\,(\phi T)\subseteq \mathrm{supp}\,\phi\cap\mathrm{supp}\,T$$

となることを証明せよ.

超関数の理論が建設された第一の目的は, 微分演算を始めとして, 解析学における種々の演算を, 古典的な意味ではそれが適用できないような関数にまで定義を拡張することにあった. いうまでもないことであるが, 以前には定義されていなかったような範囲の関数にそのような演算を施した結果に得られるものは, 一般には, もはや関数にはならない. それは, 多かれ少なかれ, 特異性をもった超関数になる. しかし, 重要なことは, それが計算や取り扱いの操作において, はっきりわかった対象物になったことである. 実際, 局所可積分関数ならば, ほとんどいたるところ一致するものは同じと見なして, 超関数の空間に単射的に含まれており, 微分作用素は超関数に作用するように定義されているのだから, 任意の局所可積分関数は超関数の意味で微分することができる

のである．また，この微分の結果は，関数が微分可能なときには[1] 古典的な意味のものと一致する．いずれにしても，関数に微分作用素を施したもの，すなわち，$P(x, D)f$, (f：局所可積分関数) の形の超関数は非常に広いクラスの超関数をあたえる．このことから自然な疑問，すなわち，“関数の (超関数の意味での) 導関数[2] の有限個の一次結合として表現できないような超関数が存在するか?” という疑問が生ずる．別の言葉でいうならば，“テスト関数の LF- 空間の双対の元として超関数を導入するというやり方によって，余りにも複雑な対象物を取り入れ過ぎて，結局は限界を超えて行き過ぎたことになっているのではないか?” という疑問である．この疑問に対する解答は，すぐ後で見るように，少なくとも局所的に考える限りにおいては，“否” である．すなわち，局所的には，任意の超関数は，関数の導関数の有限和になっている．しかしながら，このことが大域的には成り立たないことは容易にわかる (下に述べる例 24.1 参照)．その理由は，われわれの暗々裡の (後に明確に述べる) 要求，すなわち，超関数の空間に対する完備性の要求にある．$\mathcal{D}'(\Omega)$ の完備性から得られる利点の方が，大域的には関数の導関数の有限和にならない超関数を $\mathcal{D}'(\Omega)$ から追放することによって得られるものよりも大きいのである．特に，局所的には任意の超関数は関数の導関数の有限和になるという構造を知った上ではなおさらのことであろう．

さて，mを有限な非負整数としよう．既知 (定理 15.4 の系 2) のように，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ は $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ で稠密である．このことから，$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ から $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ への自然な単射を転置することによって，$\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ の双対から $\mathcal{D}'(\Omega)$ への単射を得る．このようにして，$\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ の双対空間の，超関数の空間としての “実現 (realization)” を得る[3]．

定義 24.3. $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ の双対である (Ω 上の) 超関数の空間を $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ と書く．

1) すなわち $\mathcal{C}^m(\Omega)$ の元ならば．
2) 高次の導関数も許す．
3) 定義 23.1 参照．

$\mathscr{D}'^m(\Omega)$ の元のことを，位数 $\leqslant m$ の (Ω 上の) 超関数という.

Ω 上の超関数 T が**有限位数** (of finite order) であるとは，ある整数 $m \geqslant 0$ に対して，T が Ω において位数 $\leqslant m$ であることをいう. Ω 上で位数有限な超関数の全体がなす集合を $\mathscr{D}'^F(\Omega)$ と書く.

$m' \geqslant m$ ならば明らかに $\mathscr{D}'^m(\Omega) \subseteq \mathscr{D}'^{m'}(\Omega)$ であり，したがって，$\mathscr{D}'^F(\Omega)$ は $\mathscr{D}'(\Omega)$ の部分ベクトル空間である. すぐ後で見るように，$\Omega \neq \emptyset$ であれば，$\mathscr{D}'(\Omega)$ と $\mathscr{D}'^F(\Omega)$ は一致しない.

ある超関数が，位数 $\leqslant m$ ではあるが位数 $\leqslant m-1$ ではないとき，その超関数は位数 m であるという. Ω において位数 0 の超関数とは，Ω 上の Radon 測度に他ならない.

まず，Ω 上の任意の超関数は，局所的には有限位数であるということを示そう.

定理 24.3. U を Ω の相対コンパクトな開集合とする. このとき U への制限写像による $\mathscr{D}'(\Omega)$ の像は $\mathscr{D}'^F(U)$ に含まれる.

証 明 U の閉包を K と書く. K は Ω のコンパクト集合である. Ω 上の任意の超関数 T を考えると，T の $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ への制限は，この Fréchet 空間上の連続線形形式となる. これは $\mathscr{C}_c^m(\Omega)$ の LF- 位相の定義から明らかである. ところで，$\mathscr{C}_c^\infty(K)$ の位相は，$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対する $\mathscr{C}_c^m(K)$ の位相の共通部分[1] であった. これは $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ 上の連続線形形式 $\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle$ が，ある有限な m に対する $\mathscr{C}_c^m(K)$ からの誘導位相に関して連続であることを意味する. したがって，もちろん，この形式は，$\mathscr{C}_c^\infty(U)$ ($\subseteq \mathscr{C}_c^\infty(K)$) 上において $\mathscr{C}_c^m(K)$ からの誘導位相に関して連続になる. ここで，$\mathscr{C}_c^m(U)$ の位相は $\mathscr{C}_c^m(K)$ からの誘導位相よりも細かいことに注意するならば，$\mathscr{C}_c^\infty(U)$ 上の形式 $\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle$ は $\mathscr{C}_c^m(U)$ からの誘導位相に関して連続になる. これは，ちょうど，T の U への制限が $\mathscr{D}'^m(\Omega)$ に属することを意味している. (証終).

---

1) この '**共通部分** (intersection)' という用語は，普通には '**上限** (supremum)' ともいわれる. 要するに，$\mathscr{C}_c^m(K)$ の開集合 ($m = 0, 1, \cdots$) と $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ の共通部分の全体を $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ の開集合の全体とする位相である. (162 頁参照)

系. Ω 上の台がコンパクトな超関数は，すべて有限位数である．

実際，T が $\mathcal{E}'(\Omega)$ に属するならば，Ω の相対コンパクトな開集合 U で supp T を含むものが存在する．T の U への制限は有限位数であり，supp$T$ の補集合では $T=0$ となる．これからただちに，T は Ω 全体で有限位数になることがわかる．

次に述べるのは，有限位数の超関数に対する構造定理である．

定理 24.4. T を位数が $\leqslant m<+\infty$ となる Ω 上の超関数とし，T の台を $S\subseteq\Omega$ とする．このとき，S の Ω における任意の開近傍 U に対して Ω 上の Radon 測度の系 $\{\mu_p\}$ $(p\in\mathbf{N}^n, |p|\leqslant m)$ が存在して

$$T=\sum_{|p|\leq m}(\partial/\partial x)^p\mu_p$$

が成り立つ．ここで，すべての $p\in\mathbf{N}^n, |p|\leqslant m$ について，supp $\mu_p\subseteq U$ としてよい．

証 明 $|p|\leqslant m$ となるような n-系 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ の個数を $N=N(m,n)$ と書こう．また，簡単のために，$E_m=\mathcal{C}_c{}^m(\Omega)$ と書く．そして，E_m から $(E_0)^N$ への自然な写像として，各 $\phi\in E_m$ に対してその階数が $\leqslant m$ となる導関数からなるベクトル $((\partial/\partial x)^p\phi)_{(p\in\mathbf{N}^n,|p|\leq m)}$ を対応させる写像を考える．この写像は明らかに線形であり，また明らかに上への写像ではない．しかし，ただちにわかるように，これは TVS 構造に関する同形写像である (ϕ が E_m において 0 に収束するための必要十分条件は，階数 $\leqslant m$ の各導関数が E_0 において 0 に収束することである)．この同形写像による E_m の像を $\ddot{E}_m$ で表わすことにする．したがって．E_m 上の任意の連続線形汎関数は $\ddot{E}_m$ 上の連続線形汎関数に移しかえられるが，それをまた，$(E_0)^N$ 全体に拡張することができる．ところで一般に，有限個の TVS $(F_1,\cdots,F_r)$ の積の双対は，その各々の双対の積に標準的に同形であり，それは対応

$$F_1'\times\cdots\times F_r'\ni y'=(y_1',\cdots,y_r')$$
$$\mapsto(y=(y_1,\cdots,y_r)\mapsto\langle y',y\rangle=\sum_{j=1}^{r}\langle y_j',y_j\rangle)\in(F_1\times\cdots\times F_r)'$$

による．これを $(E_0)^N$ に適用すれば，この上の任意の連続線形汎関数に対して，Ω上のN個の Radon 測度 $\{\lambda_p\}$ $(p\in \mathbf{N}^n, |p|\leqslant m)$ が定まって，

$$\langle\{\lambda_p\},\{\phi_p\}\rangle = \sum_{|p|\leqslant m}\langle\lambda_p,\phi_p\rangle$$

の形になる．この線形形式はもとの線形形式 $\phi\mapsto\langle T,\phi\rangle$ を $\ddot{E}_m$ の上に移したものの拡張になっていることがわかるから，各 $p\in\mathbf{N}^n$ について $\phi_p=(\partial/\partial x)^p\phi$ とおくことにより $(\phi\in E_m)$,

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}(-1)^{|p|}(\partial/\partial x)^p\lambda_p$$

となる．

さて，定理に述べた測度 μ_p の台に関する条件をみたすようにすることを考えよう．$g\in\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ なる関数を，T の台のある近傍上で 1 に等しく，U に含まれるある閉集合の外では 0 に等しくなるようにとる．そのような関数の存在は定理 16.4 から明らかである．そこで，乗法積 gT を考える．$gT=T$ が成り立つなぜなら，すべてのテスト関数 ϕ について，$\langle gT,\phi\rangle=\langle T,g\phi\rangle$ であり，supp $(1-g)\phi$ は $\mathrm{supp}\,T$ の補集合に含まれるから $\langle T,g\phi\rangle=\langle T,\phi\rangle$ となって，結局 $\langle gT,\phi\rangle=\langle T,\phi\rangle$ が成り立つからである．したがって，次式を得る．

$$T=gT=\sum_{|p|\leqslant m}(-1)^{|p|}g(\partial/\partial x)^p\lambda_p. \tag{24.1}$$

ところで，Leibniz の公式により

$$\begin{aligned}\langle g(\partial/\partial x)^p\lambda_p,\phi\rangle &= (-1)^{|p|}\langle\lambda_p,(\partial/\partial x)^p g\phi\rangle\\ &=(-1)^{|p|}\sum_{q\leqslant p}\binom{p}{q}\langle\lambda_p,[(\partial/\partial x)^{p-q}g](\partial/\partial x)^q\phi\rangle\\ &=\sum_{q\leqslant p}\langle(\partial/\partial x)^q[(-1)^{|p-q|}\binom{p}{q}\{(\partial/\partial x)^{p-q}g\}\lambda_p],\phi\rangle\end{aligned}$$

となる．ただし，$q\leqslant p$ は $q_1\leqslant p_1,\cdots,q_n\leqslant p_n$ を示す．このことから，

$$g(\partial/\partial x)^p\lambda_p=\sum_{q\leqslant p}(\partial/\partial x)^q[(-1)^{|p-q|}\binom{p}{q}\{(\partial/\partial x)^{p-q}g\}\lambda_p] \tag{24.2}$$

を得る．したがって，定理 24.4 に述べたような T の表現形式の存在を知るのには，(24.1) に (24.2) を代入して和の順序を整頓することと，Radon 測度

$$[(\partial/\partial x)^{p-q}g]\lambda_p$$

の台が g の台に含まれること，したがって U に含まれることに注意しさえすればよい．(証終)．

系 1. Ω 上の超関数 T が位数 $\leqslant m$ であるための必要十分条件は，それが Ω 上の Radon 測度の階数 $\leqslant m$ の導関数の有限和に等しいことである．

必要性は定理 24.4 に述べた．十分性は明白である．

系 2. T を Ω におけるコンパクトな台をもつ超関数とする．このとき有限整数 $m \geqslant 0$ が存在して，$\mathrm{supp}\, T$ の任意の近傍 U に対して，T はその台がすべて U に含まれるような Radon 測度の階数 $\leqslant m$ の導関数の有限和に等しい．

注意 24.1. 位数 $\leqslant m$ の超関数を（たとえ台がコンパクトな場合でも）その台に含まれるような台をもつ Radon 測度の導関数の有限和として表わすことは（その導関数の階数に対する制限 "階数が $\leqslant m$" をゆるめても）一般には不可能である．

すでに述べたように，開集合 Ω ($\Omega \neq \emptyset$) 上には位数が有限でない超関数が必ず存在する．

例 24.1. $\{x^k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ を Ω の点列であって，Ω の任意のコンパクト集合にはそのうちの有限個しか含まれないものとする．$\{a_k\}$ を任意の複素数列としたとき，級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (\partial/\partial x_1)^k \cdots (\partial/\partial x_n)^k \delta_{x^k}$$

は Ω 上の超関数を定義する．しかし係数 a_k が有限個を除いてすべて 0 に等しいという場合以外には，この超関数は Ω 上で有限位数にはならない．

超関数の収束級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k$$

の意味は明白であろう．それは，部分和 $\sum_{k=0}^{K} T_k (K=0,1,\ldots)$ が $\mathcal{D}'(\Omega)$ の強位相に関する収束列になることを意味する（すぐ後に見るように，列に対しては強収束と弱収束は同じことになる）．

演 習 問 題

24.4. $\{g_k\}(k=0,1,\ldots)$ を $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する関数列で関数1（すなわち，Ω 上で恒等的に1に等しい関数）に $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ において収束するものとする．このとき，任意の Ω 上の超関数 T に対して，$g_k T$ は T に $\mathcal{D}'(\Omega)$ において（強双対位相に関して）収束することを証明せよ．

24.5. Ω 上の任意の超関数は，その各項 T_k がコンパクトな台をもつ超関数の収束級数 $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$ に等しいことを証明せよ．

24.6. 実直線 $\mathbf{R}^1$ の原点における Dirac 測度 δ を，（任意の $\varepsilon>0$ に対して）その台が区間 $]-\varepsilon,\varepsilon[$ に含まれるような連続関数の導関数の有限和として表わせ．また，コンパクトな台をもつ唯一つの連続関数の（ある階数の）導関数として δ を表わすことは不可能であることを証明せよ．

317頁に述べたこと，すなわち，すべての超関数は少なくとも局所的には関数（局所可積分関数）の導関数の有限和に等しいということは，いまや明らかである．実際それを見るには，定理24.4と次の事実を組合せればよい．

定理 24.5. Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．Ω 上の任意の Radon 測度 μ は，Ω における局所 L^∞ 関数の階数 $\leqslant n$ の導関数の有限和として表わされる．

もっと正確に述べれば，$\operatorname{supp}\mu$ の任意の近傍 U があたえられたとき，その台がすべて U に含まれるような局所 L^∞ 関数の族 $\{f_p\}$，$p\in\mathbf{N}^n$，$|p|\leqslant n$ が存在して

$$\mu=\sum_{|p|\leqslant n}(\partial/\partial x)^p f_p$$

と表わされる．

証　明　まず，μ の台がコンパクトの場合から始める．Ω における μ の台の任意の開近傍を U とすれば，$C>0$ が存在して，すべての $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(U)$ について

$$|\langle \mu, \phi \rangle| \leqslant C \sup_x |\phi(x)|$$

が成り立つ．簡単のために，次の記号

$$\rhd = (\partial/\partial x_1) \cdots (\partial/\partial x_n)$$

を導入しよう．そうすれば

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} \rhd\phi(x)\, dx_1, \ldots, dx_n$$

となり，したがって

$$\sup_y |\phi(y)| \leqslant \|\rhd\phi\|_{L^1}$$

を得る．ゆえに，

$$|\langle \mu, \phi \rangle| \leqslant C \|\rhd\phi\|_{L^1}.$$

これは線形汎関数 $\rhd\phi \mapsto \langle \mu, \phi \rangle$ が $\rhd\mathcal{C}_c^\infty(U)$ 上で L^1 ノルムに関して連続であることを意味する．したがって，それは，Hahn-Banach の定理により，$L^1(U)$ 全体の上の連続線形汎関数に拡張される．ところが，そのような汎関数は $f \in L^\infty(U)$ を用いて $g \mapsto \int f(x)g(x)\,dx$ の形に表わされる (定理 20. 3)．とくに $g = \rhd\phi$, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ とすることによって，

$$\langle \mu, \phi \rangle = \langle f, \rhd\phi \rangle = \langle (-1)^n \rhd f, \phi \rangle$$

となる．すなわち，

$$\mu = (-1)^n \rhd f$$

を得る．そこで，$\operatorname{supp}\mu$ のある近傍で 1 に等しいような関数 $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ を選べば

$$\mu = \alpha\mu = \sum \pm (\partial/\partial x_{i_1}) \cdots (\partial/\partial x_{i_r}) \{[(\partial/\partial x_{i_{r+1}}) \cdots (\partial/\partial x_{i_n})\alpha] f\}$$

を得る．ここで和は整数の集合 $(1, \ldots, n)$ を二つの部分集合 $(i_1, \ldots, i_r)$, $(i_{r+1}, \ldots, i_{r_n})$ に分けるすべての仕方についての和である[1)]．これで μ がコンパクトな台をもつ場合の証明ができた．

定理 24. 5 を一般の場合に証明するには，コンパクトな閉包をもつような開集合 $U_j (j \in J)$ による Ω の局所有限開被覆とそれに従属する 1 の分割 $\{\alpha_j\}$ を

1) 計算は (24.2) のときと同様に Leibniz の公式による．

用いるとよい．各 α_j は $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する関数とする．そうして，コンパクトな台の場合の結果を測度 $\alpha_j\mu$ に適用すればよいだけである．詳しくは読者の試みに委せよう．

系 1. Ω 上の任意の Radon 測度 μ は連続関数の階数 $\leqslant 2n$ の導関数の有限和に等しい．

証　明　f を局所 L^∞ 関数とする（あるいは，もっと制限をゆるめて局所 L^1 関数としてもよい）．Ω の任意の一点 $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ をとると，x^0 の近傍において

(24.3)
$$f = \rhd F$$

ただし

$$F(x)=\int_{x_1^0}^{x}\cdots\int_{x_n^0}^{x_n} f(y)\,dy_1\cdots dy_n$$

と表わすことができる．容易に検証できるように（f が単に局所 L^1 ならば Lebesque–Nicodym の定理を用いて，f が局所 L^∞ ならば直接に），F は x^0 の十分小さな近傍で x の連続関数になる（それは［積分表示によって］関数 F が定義され得る範囲である）．表現式 (24.3) と定理 24.5 を合せれば，この系が局所的には正しいことがわかる．大局的な結果を得るには $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ に属する 1 の分割を用いればよい．

系 2. Ω 上の任意の有限位数の超関数 T は連続関数の導関数の有限和に等しい．

これは系 1 と定理 24.5 を合せればよい．

系 3. Ω の任意の相対コンパクト開集合 Ω' をあたえたとき，Ω 上の超関数 T の Ω' への制限は Ω' において Ω' 上の連続関数の導関数の有限和に等しい．

これには系 2 と定理 24.3 を合わせればよい．

演 習 問 題

24.7. $\mathbf{R}^n$ の Dirac 測度 δ は一つの有界関数（台はコンパクトでない）の階数 $\leqslant n$ の導関数に等しいことを示せ.

24.8. M を $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間とする. このとき, $\mathbf{R}^n$ 上の Lebesgue 測度 dx により M 上に誘導される測度 dx_M の意味を説明せよ[1].

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 ϕ の M への制限を $\phi|M$ で示す. このとき $\mathbf{R}^n$ 上の Radon 測度

$$\phi \mapsto \int_M \phi|M\,dx_M$$

は $\mathbf{R}^n$ 上の一つの有界関数の階数 $\leqslant n-\dim M$ の導関数に等しいことを証明せよ.

原点に台をもつ超関数

$\mathscr{E}^m$ $(0 \leqslant m < +\infty)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の m 回連続的微分可能な関数全体のなす空間とし, それに自然な $\mathscr{E}^m$-位相（階数 $\leqslant m$ のすべての導関数の $\mathbf{R}^n$ の各コンパクト集合上での一様収束の位相）を入れる. さて, その台が原点 0 の補集合に含まれるような $\mathscr{E}^\infty$ 関数全体の $\mathscr{E}^m$ における閉包を N^m で表わすことにしよう. これは次のようにいっても同じである. その台が $\mathbf{R}^n$—{0} に含まれるような $\mathscr{E}^m$ 関数全体の集合の $\mathscr{E}^m$ における閉包を N^m とする（定理15.3の系1）.

補題 24.1. $\mathscr{E}^m$ 関数であって, その階数 $< m$ の導関数がすべて原点で 0 になるようなものの全体がちょうど N^m に一致する.

証 明 $g \in \mathscr{E}_c^\infty$ を, $|x| \leqslant 1$ ならば 1 に等しく, $|x| \geqslant 2$ ならば 0 に等しくなる関数として選ぶ. $\phi \in \mathscr{E}^m$ をその階数 $\leqslant m$ のすべての導関数が原点で 0 に等しいものとする. ϕ の原点のまわりでの Taylor 展開を見れば[2], 関数 $g(x/\varepsilon)$

1) これは意味をもたないので, M にその次元の Lebesgue 測度が入っていると思えばよい.

2) すなわち, $|p| \leqslant m$ のとき $\lim_{|x|\to 0} D\phi(x)/x^{m-|p|} = 0$ を得るから.

$\phi(x)$ は $\varepsilon(>0)$ が 0 に近づくにつれて $\mathcal{E}^m$ において 0 に収束する. ゆえに $(1-g(x/\varepsilon))\phi(x)$ は $\mathcal{E}^m$ において $\phi(x)$ に収束するが, これは $\phi\in N^m$ を示している. 逆に, N^m の各元はその階数 $\leqslant m$ の導関数がすべて原点で 0 になる $\mathcal{E}^m$ 関数の $\mathcal{E}^m$ における極限だから, もちろん同じ性質をもっている.

系. $\mathcal{E}^m$ から $\mathcal{E}^m/N^m$ の上への標準的準同形写像は, その次数が $\leqslant m$ となる n 変数(複素係数)多項式全体の空間 $\mathcal{P}_n^m$ から $\mathcal{E}^m/N^m$ の上への一対一の線形写像を引き起こす[1].

証 明 明らかに $\mathcal{P}_n^m\cap N^m=\{0\}$ だから, 標準的準同形写像 $\mathcal{E}^m\to\mathcal{E}^m/N^m$ を $\mathcal{P}_n^m$ に制限したものは一対一である. この写像が上への写像であることを見るために, $f\in\mathcal{E}^m$ を任意にとり, その $x=0$ のまわりの m 次の Taylor 展開

$$f(x)=\sum_{|p|\leqslant m}\frac{1}{p!}[(\partial/\partial x)^p f(0)]x^p+\phi(x)$$

を見よう. ここで剰余項 ϕ は階数 $\leqslant m$ の導関数がすべて原点で 0 になる $\mathcal{E}^m$ 関数である. 補題 24.1 によって $\phi\in N^m$ だから, f は $\mathrm{mod}\,N^m$ で次数 $\leqslant m$ の多項式に合同となる. これは標準的準同形写像が $\mathcal{P}_n^m$ を $\mathcal{E}^m/N^m$ の上に写すことを示している.

さて, $\mathbf{R}^n$ 上の超関数であって原点に台をもつもの(すなわち, その台が集合 $\{0\}$ に含まれる超関数)の全体を $\mathcal{E}_0'$ で表わすことにしよう(0 超関数も $\mathcal{E}_0'$ に含まれる). 定理 24.3 の系によれば, $\mathcal{E}_0'$ に属する超関数はすべて有限位数である. $\mathcal{E}_0'$ に属する超関数であって位数が $\leqslant m$ なるもの, すなわち $\mathcal{E}^m$ 上の連続線形汎関数であって原点に台をもつもの全体のなす $\mathcal{E}_0'$ の線形部分空間を $\mathcal{E}_0'^m$ と書く.

補題 24.2. 空間 $\mathcal{E}_0'^m$ は N^m の直交である.

証 明 任意の超関数 $T\in\mathcal{E}_0'^m$ は, その台が $\mathbf{R}^n-\{0\}$ に含まれるようなすべ

1) すなわち, 標準的準同形写像を $\mathcal{P}_n^m$ に制限したものが $\mathcal{P}_n^m$ から $\mathcal{E}^m/N^m$ の上への一対一写像になる.

ての $\mathcal{C}^\infty$ 関数と明らかに直交する (それは $\mathrm{supp}\,T$ の定義による). したがってそのような関数全体の $\mathcal{C}^m$ における閉包 N^m と直交する. 逆に, 一つの階数 $\leqslant m$ の超関数 T が原点に台をもつのでないならば[1], 関数 $\phi\in C^\infty$, $\mathrm{supp}\,\phi\subseteq\mathbf{R}^n-\{0\}$ を選んで $\langle T,\phi\rangle\neq 0$ とすることができる. これは T が N^m に直交しないことを意味する.

さて, 標準的準同形写像 $\mathcal{C}^m\to\mathcal{C}^m/N^m$ の転置を j とすれば, j は $\mathcal{C}^m/N^m$ の双対から $\mathcal{C}^m$ の双対 $\mathcal{E}'^m$ への一対一連続線形写像となる (一対一であることはそれが上への写像の転置だからである (命題 23.2 参照)). ところで他方 $\mathcal{C}^m$ 上の連続線形形式で N^m 上で 0 になるものはすべて標準的な仕方で商空間 $\mathcal{C}^m/N^m$ 上の連続線形形式を定義するから, N^m の直交である $\mathcal{E}_0'^m$ (補題 24.2) から $\mathcal{C}^m/N^m$ の双対への一つの一対一の線形写像 k が得られる. この写像 k が写像 j の逆写像になることはただちにわかる. 実際, $N(m.n)$ によって, $|p|=p_1+\cdots p_n\leqslant m$ となるような n-系 p の個数を表わすことにしよう. 補題 24.1 の系によって

$$\dim\mathcal{C}^m/N^m=\dim\mathcal{P}_n^m=N(m,n)$$

である. 一方, $\mathcal{E}_0'^m$ は Dirac 測度の階数 $\leqslant m$ のすべての導関数を含んでいるが, これらの導関数は明らかに一次独立であり, その個数は $N(m,n)$ に等しいから,

$$\dim\mathcal{E}_0'^m\geqslant N(m,n)=\dim\mathcal{C}^m/N^m$$

を得る. ところで k は $\mathcal{E}_0'^m$ から $\mathcal{C}^m/N^m$ の双対への一対一写像であるから, 次元の比較から明らかに, k は上への写像である. これから容易に $k=j^{-1}$ が得られる. これからまた $\dim\mathcal{E}_0'^m=N(m,n)$ も出た. 換言するならば, $\mathcal{E}_0'^m$ は Dirac 測度の階数 $\leqslant m$ の導関数によって張られている. これらの結果を組合わせれば次の定理を得る.

定理 24.6. $\mathbf{R}^n$ 上の超関数であって原点に台をもつものは原点における Dirac

---

1) すなわち, $\mathrm{supp}\,T$ が原点以外の点を含むとすれば.

測度の導関数の有限一次結合に限る．

演　習　問　題

24.9．原点に台をもつ超関数の空間 $\mathcal{E}'_0$ 上の次の位相の関係を述べよ．

(a)　$\mathcal{E}'$ 上の弱位相 $\sigma(\mathcal{E}', \mathcal{E}^\infty)$ による誘導位相．

(b)　$\mathcal{E}'$ 上の強位相による誘導位相．

(c)　n 変数の複素係数多項式全体のなす LF-空間 $\mathcal{P}_n$ から，自然な同形写像

$$\sum_p a_p X^p \mapsto \sum_p a_p \delta^{(p)}$$

によって移した位相．

24.10．$\mathbf{C}^n$ 上の解析的汎関数の空間 H' は，原点に台をもつ $\mathbf{R}^n$ 上の超関数の空間 $\mathcal{E}'_0$ をある一つの位相に関して完備化したものに同形であることを証明せよ（演習問題 22.7 参照）．また，次のことを証明せよ．

1.　$H(\mathbf{C}^n)$ から $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ への自然な単射を転置することによって，$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^{2n})$ から $H'(\mathbf{C}^n)$ の上への（強双対構造に関する）準同形写像が得られる．この準同形写像の核は何か．

2.　$\mathbf{C}^n$ 上の関数を $\mathbf{R}^n$ 上に制限することによって得られる写像 $H(\mathbf{C}^n) \to \mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n)$ を転置すれば，一つの連続単射 $j: \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \to H'(\mathbf{C}^n)$ を得る．このときまた，j は同形写像でないことおよび j の像は稠密でないことを示せ．

ISBN4-0002-5

位相ベクトル空間・超関数・核(上)　1973©

1973年9月15日　第1刷発行
1986年10月25日　第2刷発行

訳　者　松(まつ) 浦(うら) 重(しげ) 武(たけ)

発行者　吉 岡 誠

京都市左京区田中門前町87

発行所　株式会社 吉 岡 書 店

電話(075)781—4747／振替京都3-4624

組版／宮崎印刷・印刷／一進印刷・製本／池田製本

ISBN4-8427-0165-X

「数学叢書」刊行に際して

最近10数年の数学の進歩はまことにめざましいものがある。発表される数学の重要論文の数は年と共に増し，新しい理論や，新しい概念が応接にいとまがないほど，たえず創造されている。数学の他の諸科学との関係もますます広く，深く，いわゆる数理科学としての発達も著しいものがある。

これらの新しい理論，概念を整理して簡明な解説を与えた世界的名著は，将来数学でなすところあらんと心掛ける若い学徒にとってまことに貴重なものである。若い学生，大学院学生は，これらの名著によって，早く現代数学の概観を得ることができるであろう。新しい数学を研究し秀れた理論を創造するには，著書や論文を読むだけではもちろん十分ではない。しかし"論文を書く"にしても，最小限の基本知識は身につけ，現代数学の概観を察し得る域には達していなければなるまい。

この叢書刊行の企図するところは，数学の各分野にわたり，重要な理論を整理し，簡明な解説を与えた世界的名著を選んで邦訳し，わが国の若い学徒が日本語により，早く高い見地に到達できるようにすることである。また今日の数学，数理科学はきわめて多方面に分化発展しているので，ある分科の専門家が他の分科の最近の発展を知ることは，必ずしも容易でない。専門外の分野にまで知識を拡げようとする際も，名著の訳註解説書が役立つことであろう。

以上の意図のもとにこの「数学叢書」を編んで世に送る次第である。

この叢書に収めるのは，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著である。特に多くの予備知識を要せず，しかも続いて数学の創造活動に直結させるが如き名著を選んだのである。翻訳はそれぞれその方面の専門家である訳者に依嘱し，各訳書には，さらにわが国の事情を考慮した適切な訳註を加えていただくことにしたのである。

この叢書が若い学徒のよき伴侶となり，研究者によってよく味読され，将来の日本の数学の活発な活動，水準の向上に資するようになることを念願する次第である。　　　　(1968年)

数　学　叢　書

編　集・彌永昌吉／岩堀長慶／河田敬義
小松醇郎／福原満洲雄／古屋茂／吉田耕作

第 1 期

フォーサイス，ワソー　藤野精一訳 **偏微分方程式の差分法による近似解法 上・下** 上 306頁　下 258頁	急速に発展した偏微分方程式の数値解法について，教養程度の知識だけを仮定して，綜合的な解説を試みた最初の書。コンピュータのプログラミングについても十分配慮されている。
ケリー　児玉之宏訳 **位相空間論** 324頁	解析学の背景として多くの類書の中でも最も広く読まれており，最初の障害となる集合論的考察・論理代数，位相の本質と空間の結びつき，重要性を増した商空間など，よく整理されて分り易い。
アグモン　村松寿延訳 **楕円型境界値問題** 318頁	本書は函数解析的・位相解析的方法による楕円型方程式の理論を扱う。弱導函数や強導函数の定義から始め，L_2 理論の枠組を使い，初歩の Hilbert 空間の知識だけを仮定して簡単かつ明快に進める。

ビリングスレイ　渡辺　毅・十時東生訳 **確率論とエントロピー** —エルゴード理論と情報量—　286頁	Shannonのエントロピーを軸に，エルゴード理論と情報理論の相互関係を明快に論じた。例と応用例が丁寧で非専門家のために書かれたが，エルゴード理論の最近の研究への入門書としても好適。
コディントン，レヴィンソン　吉田節三訳 **常微分方程式論** 上下 上 366頁　下 332頁	基本的な理論から，境界値問題と解の安定性の問題を中心とした高度な研究の紹介にまでおよぶ，声価高い本格的解説書。理論・応用いずれの読者にも有用で，行列と一変数複素関数論の初歩があればよい。
ハラナイ　加藤順二訳 **微分方程式** 上下 —安定性，振動論，遅れ時間を持った系— 上 354頁　下 298頁	制御系の問題，周期解の存在，函数微分方程式の問題などを Lyapunov の方法で安定性の立場からとらえた。体系的・独創的に力強く構成された日本語ではこの分野最初の成書である。
ミルナー　志賀浩二訳 **モース理論** —多様体上の解析学とトポロジーとの関連— 210頁	モース理論では，多様体の基礎理論とトポロジーとが密接に関連し合って，その重要さは現代数学に広く浸透してきている。ミルナーの簡潔・明快な講義はその美しい姿を示している。

第 2 期

ホール　金沢・八牧・榎本・坂内訳 **群論** 上下 上 198頁　下 318頁	著者の講義を基に，前半は基本事項を網羅し，後半は幾つかの基本的事柄の導入と応用が，さらに表現論射影平面と群との関係などを詳細に記述。章末には理解を助け応用へ発展さす練習問題がある。
ヒルツェブルフ　竹内勝訳 **代数幾何における位相的方法** 334頁	本書は層の理論と同環境の理論を用いてヒルツェブルフの定理の証明をおし進め，またファイバー束，特性類等の概念に明快な解説を与える。この定理は近代代数幾何学の驚くべき成果の一つである。
ボレビッチ，シャハレビッチ　佐々木義雄訳 **整数論** 上下 上 324頁　下 284頁	整数論の入門書として書かれ，p 進数をも含む解析的手法を用いる不定方程式追及の丹念さは和書にない魅力である。フェルマ問題がハズミ車の役割を果たしているのは非常に面白い。
ホール　岩堀信子訳 **組合せ理論** 396頁	最近数学および自然科学において生ずる不連続な，あるいは離散的な諸現象を組織的・分析的に追求する必要が起ってきた。本書はこの要求に応えるべく書かれ，線形代数と確率論の初歩で理解できる。

クレイン　牛島照夫・辻岡邦夫訳 バナッハ空間における 線形微分方程式 482頁	バナッハ空間の線形作用素の半群論，発展方程式と2階方程式の解法，漸近法，近似理論を詳述。この分野でめざましい寄与をしている邦人・ロシア学派の人々の研究も紹介されている。
ホッホシルト　橋本浩治訳 リー群の構造 264頁	最少限度の解析学的知識で，リー群の基本的結果や技巧を学べる。理論の展開は直線的に最も重要な結果へ近づけ，簡潔にまとめられ，初学者にも理解しやすく容易に読みこなせる。
パラモドフ　内山・金子・森本訳 定数係数線形微分作用素 上下 上 290頁　下 278頁	超函数を用いた定数係数の偏微分方程式の理論が丁寧に述べられている。解析的な準備（フーリエ変換など），代数的準備（ホモロジー代数など）に紙数をおしまず，本書を読めばこの分野の専門家になれる。

第 3 期

アーノルド，アベズ　吉田耕作訳 古典力学のエルゴード問題 296頁	定常な Hamilton 型力学系，したがってその時間的発展が相空間の相体積を不変にするような保測変換の1パラメター群で与えられるような力学系の分類について最新のエントロピー理論を解説した好著。
トレーブ　松浦重武訳 位相ベクトル空間・超関数・核 上下 上 344頁　下 400頁	著者の講義を基に予備知識を求めず丁寧すぎるほどやさしく教育的に記述。ボレル・グラフ定理まで含まれ，今日的で，例題（新しい例もこめて）の豊富なことも特長の一つである。
リィー，マーカス　占部・古川・伊藤訳 現代の最適制御理論 上下 上 332頁　下 続 刊	微分方程式系の制御理論に関する最近までの研究成果全般を，微分方程式論を基礎にして平易にかつ組織的に論じる。理論のみに終ることとなく重要な具体的問題にも触れ，また数値解法にも言及。
スターンバーグ　高橋恒郎訳 微分幾何学 424頁	大域的微分幾何学に関する主要な基本定理の解説・証明と共に変分学，リー群，曲線・曲面論，接続の理論，G 構造の理論などが平易に解説され，現代微分幾何学の最も優れた入門書である。
スチーンロッド　大口邦雄訳 ファイバー束のトポロジー 312頁	理論の体系的組織化を目指して書かれた最も基本的・オリジナルな教科書。始めに色々な例をあげて直観的見通しと指針を与え，除々に中心概念に親しませ，理論の厳密な構成と展開にとりかかる。